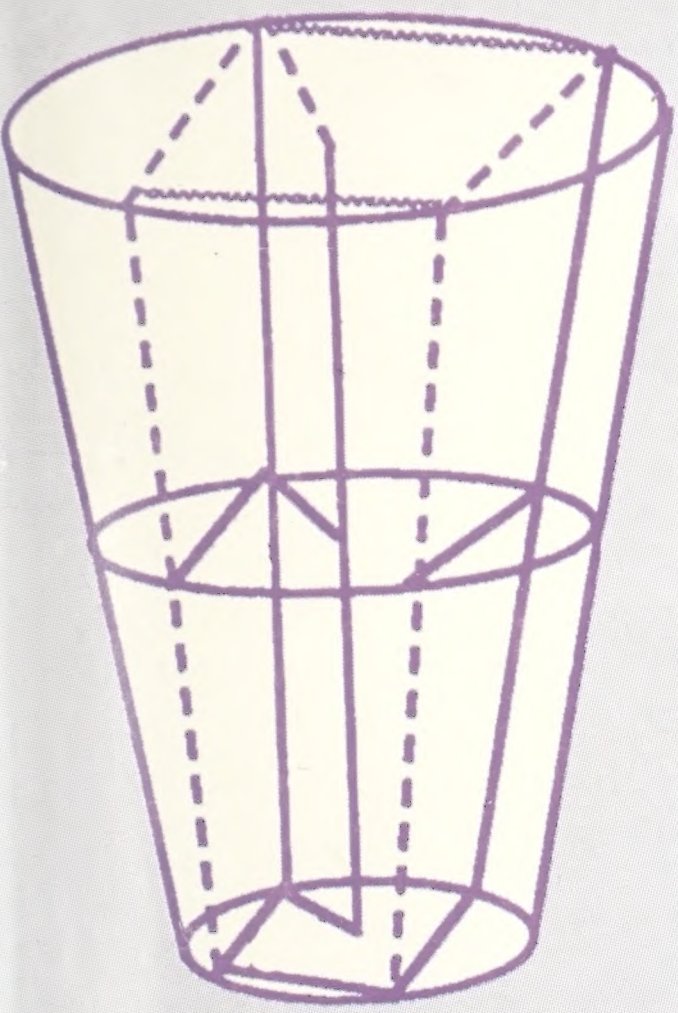
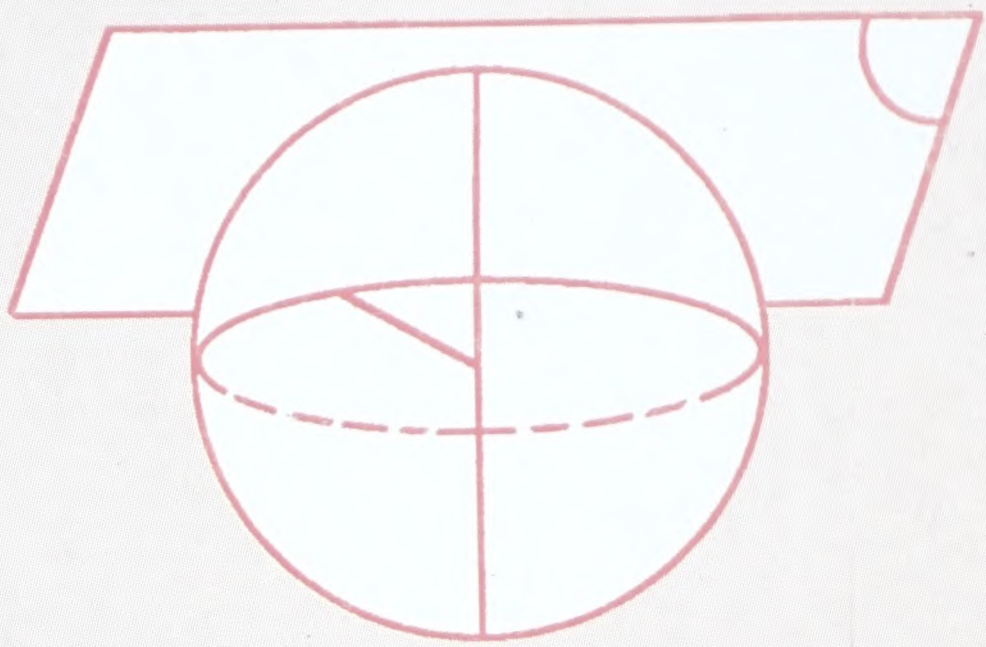




12

هەڵەبجە قەدیمەکان - هەڵەبجە

وەرگێڕانی بەڕێوەبرد


ܒܝܬ ܡܪܕܘܬܐ
ספרית בית מרדותא
Ex Libris
Beth Mardutho Library
The Malphono Abrohom Nuro Collection

ههڵبژاردەی چوارەمی هەڵەدان - زنجیرە

هەولێر ٢٠٠٣ - ٦٧٥٣ ز

ئەدەب

چیرۆک و بەڵگەنامە

وەزارەتی پەروەردە

هەڵبژاردەی کۆرسەکانی ئێوارە

هاوڕێ چەمچەماڵ - هەڵەدن

8182 - LL

سەرپەرشتیارانی چاپ

اندریوس یوخنا کورکیس

نادر موشي مراد

١٠١ المقدمة ٣

١٠٢ مفهوم علم الاقتصاد ٤

١٠٣ نشأة علم الاقتصاد وتطوره ٥

١٠٤ الحاجات الإنسانية ٦

١٠٥ الموارد الاقتصادية ٧

١٠٦ تقسيم الموارد الاقتصادية ٨

١٠٧ الثروة ٩

١٠٨ القيمة ١٠

١٠٩ النقود ١١

١١٠ الإنتاج ١٢

١١١ عناصر الإنتاج ١٣

١١٢ تقسيم العمل ١٤

١١٣ الآلات ١٥

١١٤ رأس المال ١٦

١١٥ الادخار ١٧

١١٦ الاستثمار ١٨

١١٧ التوزيع ١٩

١١٨ الاستهلاك ٢٠

١١٩ الاقتصاد الحر ٢١

١٢٠ الاقتصاد الموجه ٢٢

١٢١ الاقتصاد المختلط ٢٣

١٢٢ الاقتصاد الإسلامي ٢٤

فهرس المحتويات

محتويات الكتاب

تعريف (١٠١)

(١) العدد $z + ص\,ت$ حيث $z ، ص \in ح$ ، $ت = \sqrt{-١}$ يُسمى عددًا مركبًا. z تُسمى حقيقية العدد المركب وتكتب $ح(z)$ ، $ص$ تُسمى التخيلية وتكتب $ت(z)$.

مجموعة الأعداد المركبة ويرمز لها بالرمز $ك$.

(٢) $z = ص$ فقط إذا كان z عددًا حقيقيًا.

(٣) $z = ص\,ت$ فقط إذا كان z عددًا تخيليًا.

(٤) $z = ٠$ إذا وفقط إذا كان $z = ٠ + ٠\,ت$.

مثال (١) أوجد قيم $ت^{٠}$ ، $ت^{١}$ ، $ت^{٢}$ ، $ت^{٣}$ ، $ت^{٤}$:

$ت^{٠} = ١$ ، $ت^{١} = ت$ ، $ت^{٢} = -١$ ، $ت^{٣} = ت^{٢} \times ت = -١ \times ت = -ت$ ، $ت^{٤} = ت^{٣} \times ت = -ت \times ت = -ت^{٢} = -(-١) = ١$

الحل

تعريف (١٠٢)

مجموعة الأعداد المركبة $ك$ هي مجموعة جميع الأزواج المرتبة $(س ، ص)$ حيث $س ، ص \in ح$ وتعرف العمليتان الثنائيتان الجمع والضرب على $ك$ كما يلي:

$(س_{١} ، ص_{١}) + (س_{٢} ، ص_{٢}) = (س_{١} + س_{٢} ، ص_{١} + ص_{٢})$

$(س_{١} ، ص_{١}) \times (س_{٢} ، ص_{٢}) = (س_{١} س_{٢} - ص_{١} ص_{٢} ، س_{١} ص_{٢} + س_{٢} ص_{١})$

ملاحظات

(١) $(س ، ٠) + (ص ، ٠) = (س + ص ، ٠)$

(٢) $(س ، ٠) \times (ص ، ٠) = (س ص ، ٠)$

(٣) $(س ، ص) = (س ، ٠) + (٠ ، ص)$

(٤) $(٠ ، ١) \times (٠ ، ١) = (-١ ، ٠)$

(٥) $(٠ ، ١)^{٢} = (-١ ، ٠)$

(٦) $(٠ ، ١)^{٣} = (-١ ، ٠) \times (٠ ، ١) = (٠ ، -١)$

(٧) $(٠ ، ١)^{٤} = (-١ ، ٠) \times (-١ ، ٠) = (١ ، ٠)$

(٨) $(٠ ، ١)^{ن} = (١ ، ٠)$ حيث $ن$ عدد صحيح موجب مضاعف للعدد ٤

(٩) $(٠ ، ١)^{ن} = (-١ ، ٠)$ حيث $ن$ عدد صحيح موجب فردي

(١٠) $(٠ ، ١)^{ن} = (٠ ، -١)$ حيث $ن$ عدد صحيح موجب على الصورة $٤ن + ٣$

(١١) $(٠ ، ١)^{ن} = (٠ ، ١)$ حيث $ن$ عدد صحيح موجب على الصورة $٤ن + ١$

(١٢) $(س ، ص)^{-١} = (\frac{س}{س^{٢} + ص^{٢}} ، \frac{-ص}{س^{٢} + ص^{٢}})$ حيث $س ، ص$ ليسا معًا يساويان الصفر

(١٣) $(س ، ص)^{ن} = (س^{٢} + ص^{٢})^{\frac{ن}{٢}} (\cos ن\theta ، \sin ن\theta)$ حيث $ن$ عدد صحيح موجب ، $\theta = \tan^{-١}(\frac{ص}{س})$

مثال (١٠٢)

برهن أنه إذا كان $ع$ عددًا مركبًا غير الصفر فإن $ع$ ، $\frac{١}{ع}$ لهما نفس المقياس.

الحل

نفرض أن $ع = س + ص\,ت$ حيث $س ، ص \in ح$ ، $ع \neq ٠$ فإن:

$$\frac{١}{ع} = \frac{١}{س + ص\,ت} = \frac{س - ص\,ت}{س^{٢} + ص^{٢}}$$

$$\therefore \text{مقياس } \frac{١}{ع} = \sqrt{(\frac{س}{س^{٢} + ص^{٢}})^{٢} + (\frac{-ص}{س^{٢} + ص^{٢}})^{٢}} = \sqrt{\frac{س^{٢} + ص^{٢}}{(س^{٢} + ص^{٢})^{٢}}} = \frac{١}{\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}}$$

$$= \frac{١}{\text{مقياس } ع}$$

$\therefore$ مقياس $ع$ = مقياس $\frac{١}{ع}$

مثال (١٠٣)

أوجد الجذور التربيعية للعدد المركب $ع = ٣ + ٤\,ت$ ثم مثلها هندسيًا.

الحل

نفرض أن $ع = س + ص\,ت$ حيث $س ، ص \in ح$ هو أحد الجذور التربيعية للعدد $ع$

$\therefore ع = (س + ص\,ت)^{٢}$

$٣ + ٤\,ت = س^{٢} + ٢ س ص\,ت - ص^{٢}$

$\therefore س^{٢} - ص^{٢} = ٣$ ، $٢ س ص = ٤$

$\therefore س^{٢} - \frac{٤}{س^{٢}} = ٣$ ، $ص = \frac{٢}{س}$

$\therefore س^{٤} - ٣ س^{٢} - ٤ = ٠$

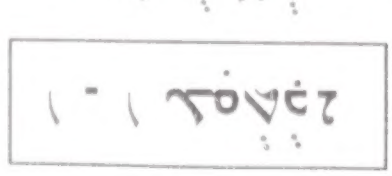
$\therefore (س^{٢} - ٤)(س^{٢} + ١) = ٠$

$\therefore س^{٢} = ٤$ ، $س^{٢} = -١$ (مرفوض)

$\therefore س = \pm ٢$

$\therefore ص = \pm ١$

$\therefore$ الجذور التربيعية للعدد $ع$ هي $٢ + ت$ ، $-٢ - ت$



١ـ٢ متواليات حسابية ومتوالية ذات حدود حقيقية

تعريف : متوالية حسابية هي متوالية ذات حدود حقيقية

فيها الفرق بين أي حدين متتاليين مقدار ثابت

يسمى أساس المتوالية الحسابية ويرمز له بالرمز $د$

ملاحظة

$د = ح_{ن+١} - ح_ن$ ، $ن \in ط$

مثال

متوالية حسابية حدها الأول ٣ وأساسها ٥ فإن :

$ح_١ = ٣$

$ح_٢ = ٣ + ٥ = ٨$

$ح_٣ = ٨ + ٥ = ١٣$

$ح_٤ = ١٣ + ٥ = ١٨$

$ح_٥ = ١٨ + ٥ = ٢٣$

مثال

متوالية حسابية حدها الأول ٢ وأساسها -٣ فإن :

$ح_١ = ٢$

$ح_٢ = ٢ - ٣ = -١$

$ح_٣ = -١ - ٣ = -٤$

$ح_٤ = -٤ - ٣ = -٧$

$ح_٥ = -٧ - ٣ = -١٠$

ملاحظة

إذا كان $ح_ن$ حداً عاماً لمتتالية عددية ، فإنه ليس من الضروري أن تكون متوالية

فمثلاً المتتالية $\{ ١ ، -١ ، ٨ ، -٨ \}$ ليست متوالية لأن الفرق بين كل حدين متتاليين ليس مقداراً ثابتاً .

تعريف (١) المتوالية الحسابية $\{ ح_ن \}$ ذات الحد العام $ح_ن = ٨ + ٢ن - ١$ ، $ن \in ط$

مثال هل ٥٠ حداً من حدود المتوالية $\{ ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ... \}$ ؟

$ح_ن = ٨ + ٢ن - ٢$

$٥٠ = ٨ + ٢ن - ٢$

$٥٠ = ٦ + ٢ن$

$٤٤ = ٢ن$

$ن = ٢٢$

إذن ٥٠ هو الحد الثاني والعشرون في المتوالية

تعريف (٢) المتوالية الحسابية $\{ ح_ن \}$ ذات الحد العام $ح_ن = ٨ + ٢ن - ١$ ، $ن \in ط$

مثال أوجد الحد الأول والأساس للمتوالية الحسابية $\{ ٣ ، ٧ ، ١١ ، ... \}$

$ح_١ = ٨ + ٢ - ١ = ٣$

$ح_٢ = ٨ + ٤ - ١ = ٧$

$د = ح_٢ - ح_١ = ٧ - ٣ = ٤$

مثال أوجد الحد الأول والأساس للمتوالية الحسابية $\{ ٢ ، ٥ ، ٨ ، ... \}$

$ح_١ = ٨ + ٢ - ٣ = ٢$

$ح_٢ = ٨ + ٤ - ٣ = ٥$

$د = ح_٢ - ح_١ = ٥ - ٢ = ٣$

مثال أوجد الحد الأول والأساس للمتوالية الحسابية $\{ ٨ ، ٣ ، -٢ ، ... \}$

$ح_١ = ٨ + ٢ - ٥ = ٨$

$ح_٢ = ٨ + ٤ - ٥ = ٣$

$د = ح_٢ - ح_١ = ٣ - ٨ = -٥$

$ح_{١٥} = ٨ + ٣٠ - ٥ = ٣٣$

$ح_{١٠٠} = ٨ + ٢٠٠ - ٥ = ٢٠٣$

مثال أوجد الحد الأول والأساس للمتوالية الحسابية $\{ ٢ ، ٥ ، ٨ ، ... \}$

الحل

$ح_١ = ٨ + ٢ - ٣ = ٢$

$ح_٢ = ٨ + ٤ - ٣ = ٥$

$د = ح_٢ - ح_١ = ٥ - ٢ = ٣$

فيما يأتي $ح_١ = ح_٢$ ، $د_١ = د_٢$ ، $ل_١ = ل_٢$

متوالية (١ ـ ٢)

حد متوالية حسابية $ح_ن = ل_١ + د_١ ن$ ، $ح_ن = ل_٢ + د_٢ ن$ أيضاً

$ح_١ ، ح_٢ \in ح$

فيما يأتي $ح_١ = ح_٢$ يكافئ $ل_١ = ل_٢ ، د_١ = د_٢$

خاصة $(٣+٠\,A)+(٢-٥\,A)=$

$$(٣+٢)+(٠-٥)A=٥-٥A$$

خاصة إضافية لجمع متجهات في المستوى

تعريف جمع متجهات في المستوى: ليكن $ك_١ ، ك_٢ ، ك_٣ \in د$

(١) خاصة الجمع: $ك_١ + ك_٢ = ك_٢ + ك_١$

(٢) خاصة التجميع:

$$ك_١ + (ك_٢ + ك_٣) = (ك_١ + ك_٢) + ك_٣$$

(٣) يوجد $ك \in د$ ، $ك = ل + ت\,A$ بحيث يوجد $-ك \in د$ بحيث

$$-ك = -ل - ت\,A \text{ ، حيث } ل ، ت \in ح$$

٦

خاصة (٥) يمكن جمع أي متجهين في المستوى $٣ ، ٢ - ٥A$

الحل

$$=(٣+٠\,A)+(٢-٥\,A)$$

$$=A(٣+٢)+(٠-٥)$$

$$=٥-٥A$$

خاصة $(٣+٤\sqrt{٢}A)+(٥-٢\sqrt{٢}A)=$

$$=A(٣+٥)+(٤\sqrt{٢}-٢\sqrt{٢})$$

$$٨+٢\sqrt{٢}A$$

خاصة (٤) يمكن جمع أي متجهين في المستوى $٥-٢\sqrt{٢}A ، ٣+٤\sqrt{٢}A$

البرهان

نفرض أن $ك_١ = ل_١ + ت_١A ، ك_٢ = ل_٢ + ت_٢A$ حيث $ل_١ ، ل_٢ ، ت_١ ، ت_٢ \in ح$

بتعويض $ك_١ ، ك_٢$ في $ك_١ + ك_٢$ نجد أن

$$ك_١ + ك_٢ = (ل_١ + ت_١A) + (ل_٢ + ت_٢A)$$

$$=(ل_١ + ل_٢) + (ت_١ + ت_٢)A$$

وبما أن $(ل_١ + ل_٢) \in ح ، (ت_١ + ت_٢) \in ح$

(حاصل جمع عددين حقيقيين هو عدد حقيقي وحيد) فإن $[(ل_١ + ل_٢) + (ت_١ + ت_٢)A] \in د$ ، حيث يمثل

ناتج جمع متجهين في المستوى متجهاً وحيداً هو متجه المجموع.

مثال : مجموعة حلول المعادلة التالية حقيقية

$$\Rightarrow \quad \text{ص} = -٧ + ٥ \text{ م} \qquad \text{(بضرب الطرفين في } \frac{-١}{٨}\text{)}$$

$$\Rightarrow \text{ص} + \text{ص} = (-٧ + ٥ \text{ م})$$

(بالتعويض)

$$[-(٢ - ٤ \text{ م}) + (٢ - ٤ \text{ م})] + \text{ص} = (-٢ + ٤ \text{ م}) + (-٥ + ٥ \text{ م})$$

$$-(٢ - ٤ \text{ م}) + [(٢ - ٤ \text{ م}) + \text{ص}] = -(٢ - ٤ \text{ م}) + (-٥ + ٥ \text{ م}) \Rightarrow$$

الحل

المعادلتان التاليتان المعرفتان على ح هما معادلتا خطين مستقيمين

في المستوى الديكارتي نفسه

١) كيف يمكن معرفة هل المستقيمان متوازيان أم متقاطعان؟

٢) إذا كانا متقاطعين فما هي نقطة تقاطعهما؟

المعادلتان

١) $٢ \text{ س} - ٣ \text{ ص} = ١$ ، $-٨ \text{ س} + ٢ \text{ ص} = ٣$

نتوقع أن نجد أن ميل المستقيم الأول يساوي ميل المستقيم الثاني.

لنجد ميل كل منهما :

نجد ميل المستقيم الأول (٢ س − ٣ ص = ١)

$$\text{ص} = \frac{٢}{٣} \text{ س} - \frac{١}{٣}$$

$$\text{ميل} = \frac{٢}{٣}$$

نجد ميل المستقيم الثاني (−٨ س + ٢ ص = ٣)

$$\text{ص} = ٤ \text{ س} + \frac{٣}{٢}$$

$$\text{ميل} = ٤$$

نلاحظ أن ميل المستقيم الأول لا يساوي ميل المستقيم الثاني

إذن المستقيمان متقاطعان

لإيجاد نقطة التقاطع نحل المعادلتين آنيا

$$\text{ص} = \frac{٢}{٣} \text{ س} - \frac{١}{٣}$$

$$\text{ص} = ٤ \text{ س} + \frac{٣}{٢}$$

$$\frac{٢}{٣} \text{ س} - \frac{١}{٣} = ٤ \text{ س} + \frac{٣}{٢}$$

$$\frac{-١٠}{٣} \text{ س} = \frac{١١}{٦}$$

$$\text{س} = \frac{-١١}{٢٠}$$

$$\text{ص} = \frac{٢}{٣} \times \frac{-١١}{٢٠} - \frac{١}{٣}$$

$$= \frac{-٢٢}{٦٠} - \frac{٢٠}{٦٠}$$

$$= \frac{-٤٢}{٦٠}$$

نقطة التقاطع هي $\left(\frac{-١١}{٢٠}, \frac{-٤٢}{٦٠}\right)$

مثال $(٢ \text{ س} - ٣ \text{ ص}) + (٤ \text{ س} + ٩ \text{ ص}) = (٣ \text{ س} - ٧ \text{ ص}) - (٢ \text{ س} + ٣ \text{ ص})$

$$= (٣ \text{ س} - ٧ \text{ ص}) + (-٢ \text{ س} - ٩ \text{ ص})$$

$$= (٣ - ٢) \text{ س} + (-٧ - ٩) \text{ ص}$$

$$= \text{س} - ١٦ \text{ ص}$$

الحل (٢) **إذن ميل المستقيم الثاني (٤ س + ٩ ص = ٣)**

الحل (٣) **بضرب طرفي (٢ س − ٣ ص = ١) في ٤**

$$(٨ \text{ س} - ١٢ \text{ ص} = ٤)$$

نلاحظ أن المستقيمين متوازيان

ليس لهما نقطة تقاطع إذن ليس لهما أي نقطة مشتركة

لنوضح ذلك بالرسم : نحتاج لثلاث نقاط ص١ = ١ + ٢ م ، ص٢ = ٣ − م ، ص٣ = ٢ − ٢ م حيث

نتأكد أن النقاط الثلاث تقع على المستقيم.

(٤) هناك نقاط (٠ ، ٠ م) بلا نهاية تحقق معادلة المستقيم هناك

نقاط.

$$(٢)\ (٥\ أ)\ هـ = (-٥\ د) + (٥\ ﻝ)\ أ$$

مثال : إذا كان $هـ = ٣ - ٢\ أ\ ،\ ٥ = -٥$ فجد الصورة $هـ$

الحل

نجد صورة المستقيم ﻝ

نجد صورة المستقيم ﻝ بالانسحاب الذي متجهه الموضع $د$: نجد

صورة المستقيم ﻝ بالانسحاب الذي متجهه الموضع $د$ هي :

لكل $هـ$ من $هـ_١\ ،\ هـ_٢\ ،\ هـ_٣ \in د$

(١) خاصية الإبدال :

$$هـ_١ \times هـ_٢ = هـ_٢ \times هـ_١$$

(٢) خاصية الدمج :

$$(هـ_١ \times هـ_٢) \times هـ_٣ = هـ_١ \times (هـ_٢ \times هـ_٣)$$

(٣) لكل $هـ \in د$ توجد $هـ$ بحيث $هـ \times ١ = ١ \times هـ = هـ$

هذا يعني أن المجموعة $د$ تحوي العنصر المحايد ١ بالنسبة لعملية الضرب .

(٤) لكل $هـ \in د$ يوجد $\frac{١}{هـ}$ بحيث $هـ \times \frac{١}{هـ} = \frac{١}{هـ} \times هـ = ١$

هذا يعني أن كل عنصر في $د$ له نظير ضربي .

خاصية الإبدال (٩) إذا كان $(٣ + ٤\ أ)$ عنصراً في $د$

$$(٣ + ٤\ أ)^{-١} = (٣ + ٤\ أ)(٣ + ٤\ أ)$$

هذا

$$= (٩ - ١٦) + (١٢ + ١٢)\ أ$$

$$= -٧ + ٢٤\ أ$$

فإن

نفرض أن $و \in ح$ ، $هـ \in د$ بحيث $هـ = ﻝ + د\ أ$ حيث :

$$(١)\ و\ هـ = (و\ ﻝ) + (و\ د)\ أ$$

مثال : ليكن $هـ = ٣ - ٢\ أ\ ،\ و = -٥$ فجد $و\ هـ$

الحل

$$(٢)\ (٥\ أ)\ هـ = (-٥\ د) + (٥\ ﻝ)\ أ$$

مثال : إذا كان $هـ = ٣ - ٢\ أ\ ،\ و = -٥$ فجد $و\ هـ$

الحل

نجد $و\ هـ$ بالانسحاب الذي متجهه الموضع $د$ ثم نجد صورة المستقيم ﻝ بالتحاكي الذي مركزه الموضع $ص$ ونسبته $و$

نجد صورة المستقيم ﻝ بالانسحاب الذي متجهه الموضع $د$: نفرض $هـ_١ \in د$ ، فإن موضع صورة $هـ_١$ بالانسحاب الذي متجهه الموضع $د$ هي $هـ_٢$ حيث :

$$هـ_٢ = هـ_١ + د$$

نجد صورة المستقيم ﻝ بالتحاكي الذي مركزه الموضع $ص$ ونسبته $و$: نفرض $هـ_٢ \in د$ ، فإن موضع صورة $هـ_٢$ بالتحاكي الذي مركزه الموضع $ص$ ونسبته $و$ هي $هـ_٣$ حيث :

$$هـ_٣ - ص = و(هـ_٢ - ص)$$

إذن صورة المستقيم ﻝ هي :

$$هـ_٣ = و\ هـ_٢ + (١ - و)\ ص$$

$$= و(ﻝ + د\ أ) + (١ - و)\ ص$$

$$= (و\ ﻝ + (١ - و)\ ص) + و\ د\ أ$$

وهي مستقيم يوازي المستقيم ﻝ

(٣) هَيْقِ لِكْنَةِ دَيْفِرْوِ

(ب . ر . ط) $\overline{ق} \times \overline{ر} = (٨ - ٠) = (١ - ٨)(٣ + ٨٢)$. ضوْفِ هِضْلِةِ

$\therefore \overline{ق ر} = ٠ - ٨$. ضوْفِ ڤِمْضِلِةِ

(٢) $\overline{ق} \times \overline{ر} = (٣ - ٨٢)(١ + ٨) = ٠ + ٨$

(ب . ر . ط)

$\therefore \overline{ق} + \overline{ر} = (٣ + ٨٢) + (١ - ٨) = ؛ + ٨$. ضوْفِ هِضْلِةِ

$\therefore \overline{ق} + \overline{ر} = ؛ - ٨ = \overline{؛ - ٨}$. ضوْفِ ٱمْضِلِةِ

$\overline{ق} = ٣ + ٨٢$. $\overline{ر} = ١ - ٨$

(١) $\overline{ق} + \overline{ر} = (٣ - ٨٢) + (١ + ٨) = ٠ - ٨$ ؛ ط ∈ ك

مثال

$$\frac{\overline{ر}}{ق} \times \overline{ق ر} = ق \quad (٢)$$

$$\frac{ق}{ر} = |\frac{\quad}{\quad}| = ؛ \quad (٣)$$

$$\overline{ق} + \overline{ر} = ق + \overline{ر} \quad (١)$$

مثال (١٠) إذا $ق = ٣ - ٨٢$ ، $ر = ١ + ٨$ فأثبت أن

لكل $ق \neq$ صفر . $ق \in ك$ إذا $\frac{ق}{|ق|} \in ك$

(؛) إذا كانت ك مجموعة جزئية غير خالية من ح فإن ك تسمى مجموعة جزئية مغلقة من ح بالنسبة لعملية الضرب (.) إذا وجد لكل عنصرين ق ، ر من ك عنصر ق ر ينتمي إلى ك ((مجموعة الأعداد الصحيحة غير الصفرية مجموعة جزئية مغلقة من مجموعة الأعداد الصحيحة بالنسبة لعملية الضرب)).

مجموعة الأعداد الصحيحة غير الصفرية

إذا $ق = ١ + ك ٨$ ، فإن عنصرا لكن يمثل $\overline{ق}$ في

$\overline{ق} = ١ - ك ٨$ ، $ك \in ط$

فإن العنصر $٣ + ٨$ يمثل أيضا $٣ - ٨$ أيضا .

إذ ٨ أيضا (-٨) أيضا

$٥ - ؛٨$ أيضا $(٥ + ؛٨)$ أيضا.

$$= \frac{٥٦ + ١}{٢٥ + ١} = \frac{٢٦}{٢٦} - \frac{١٣}{١٣} \Delta$$

$$\frac{٣ - ٢\Delta}{٣ - ١\Delta} \times \frac{٥ + \Delta}{٥ - \Delta} = \frac{٥ + \Delta}{\Delta + ٥} \quad \text{الحل}$$

المطلوب (أ) إيجاد ناتج $\frac{٥ + \Delta}{٣ - ٢\Delta} \div \frac{٥ - \Delta}{٣ - ٢\Delta}$ في أبسط صورة

$$= [\Delta ٢ + ١ - ٢ - ١ - \Delta ٢ + ١]٢$$

$$= [١ - \Delta ٢ - ١ + (١ + ١) - ١ - \Delta ٢ + ١]٢$$

$$= [(\Delta ٢ + \Delta ٢ - ١) + (١ - \Delta ٢) - (\Delta ٢ + \Delta ٢ + ١)]٢$$

$$[(١ + \Delta) + (١ - \Delta)][(١ + \Delta)^٢ - (١ + \Delta)(١ - \Delta) + (١ - \Delta)^٢] =$$

$$= (١ + \Delta)^٢ + (١ - \Delta)^٢$$

الحل جميع الأعمدة جيدة جدًا ما عدا العمود

المطلوب (٣) في $(١ + \Delta)^٢ + (١ - \Delta)^٢$ استخدام الحاسبة في إيجاد ناتج

$$= \frac{٩ + ١٦}{٣ - ٤\Delta} = \frac{٢٥}{٣} - \frac{٢٥}{٤} \Delta$$

الحل

$$\frac{٣ + ٤\Delta}{١} = \frac{٣ + ٤\Delta}{١} \times \frac{٣ - ٤\Delta}{٣ - ٤\Delta}$$

المطلوب (٢) في $\frac{١}{٣ + ٤\Delta}$ استخدام الحاسبة في إيجاد ناتج

$$= \frac{٢ - ٢\Delta}{٢ + ٢\Delta} \times \frac{٤}{١} = \frac{٤}{١} + \frac{١}{١} \Delta$$

الحل إيجاد ناتج $\frac{٢ - ٢\Delta}{١}$ في أبسط صورة

المطلوب (١) إيجاد ناتج $(٢ - ٢\Delta)$ في أبسط صورة مستخدمًا الحاسبة

السؤال الثاني : أجب عن جميع الأسئلة الآتية :

$$\text{ق} = ٢ \times (-١)^{٢} - ٢ = \text{صفر}$$

الحل عندما ق = (-١) إذن (١) تحقق

عندما ق = (٢) إذن (١) تحقق :

$$٠ = ٠ \text{ ق} \Rightarrow \text{ق} = ١ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

$$\text{ق} = ٢ \text{ ق}_{١} - ٢ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

من خصائص متتابعة حسابية حدها العام من الدرجة الثانية :

السؤال (١٥) إذا مثل ق = -١ + ٨٢ إذن متتابعة ق$_{١}$ + ٢ق + ٥

الحل ق$_{١}$ + ٢ ق + ٥ = (-١ + ٢ ٨)^{٢} + ٢ (-١ + ٢ ٨) + ٥

$$= ١ - ٤ ٨ + ٤ ٨^{٢} - ٢ + ٤ ٨ + ٥$$

$$= ٤ ٨^{٢} + ٤ ٨ - ٤ : ١$$

$$= -٣ + ٣ = \text{صفر}$$

السؤال (١٦) ضع (١ - ٨) (١ - ٨^{٢}) (١ - ٨^{٣}) = ٤

الحل ٤ = (١ + ١) (١ - ٨) = ١ - ٨^{٤}

$$١ - ٨^{٢} = ١ - ٨ \times ٨^{٣} = ١ - (-١) ٨ = ٨ + ١$$

$$\text{ضوء نهاية} = (١ - ٨) (١ - ٨^{٢}) (١ - ٨^{٣}) = (١ - ٨) (١ + ٨) (١ + ٨^{٢}) = (١ - ٨^{٢}) (١ + ٨^{٢}) = (١ - ٨^{٤}) = ٢٠ (١ + ١) = ٢$$

$$= ٤ = \text{ضوء نهاية}$$

السؤال (١٧) إذا كان متتابعة حسابية حدها العام ق = ٢ ق + ٨ أثبت أن :

الحل ق$_{١}$ + ٥٨ = (٢ ق + ٨) (ق + ٢٨)

عندما ق = ٤ إذن ق$_{١}$ + ٥٨ = (٢ ق$_{١}$ - ٢) + (٤ ق + ق) ٨

ق$_{١}$ + ٥٨ = (٢ ق$_{١}$ - ٢) + (٥ ق) ٨

$$\text{ب) } \frac{\text{٨}+\text{١}}{\text{٨}-\text{١}} - \frac{\text{٨}-\text{١}}{\text{٨}+\text{١}} = -\text{٢}$$

س٤ : فكِّر ثم أجب : إذا كان ٤ + ب ٨ عددًا صحيحًا فردِّيًا فبيِّن أن :

$$\text{أ) } \left(\frac{\text{٨}+\text{٢}}{\text{٨}+\text{١}}\right)^{\text{٣}}$$

$$\text{ب) } \frac{\text{٨}\text{٣}+\text{٢}}{\text{٨}+\text{٣}\text{٤}+\text{١}} - \frac{\text{٨}+\text{٤}}{\text{٨}-\text{١}}$$

س٥ : إذا كان العدد ك هو ثلاثة أمثال العدد ن فاكتب بدلالة ن كلًّا مما يأتي :

$$\text{أ) } \text{ك}^{\text{٣}} + \text{٢}\text{ن}^{\text{٣}}$$

$$\text{ب) } \text{ك}^{\text{٣}} - \text{٢}\text{ن}^{\text{٣}}$$

$$\text{جـ) } \text{ك}^{\text{٣}} \times \text{ن}^{\text{٣}}$$

$$\text{د) } \text{ك}^{\text{٣}} \div \text{ن}^{\text{٣}}$$

س٦ : إذا كان ٨ = ٢ فأوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\text{أ) } \text{٨}^{\text{٣}} \times \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{ب) } \text{٨}^{\text{٣}} \div \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{جـ) } (\text{٨}^{\text{٣}})^{\text{٢}} \qquad \text{د) } \text{٨}^{\text{٣}} + \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{هـ) } \text{٨}^{\text{٣}} - \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{و) } \text{٨}^{\text{٠}}$$

س٧ : ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ فيما يأتي :

$$\text{أ) } \text{٨}^{\text{٣}} \times \text{٨}^{\text{٢}} = \text{٨}^{\text{٦}} \qquad \text{ب) } \text{٨}^{\text{٣}} \div \text{٨}^{\text{٢}} = \text{٨}^{\text{١}}$$

$$\text{جـ) } (\text{٨}^{\text{٣}})^{\text{٢}} = \text{٨}^{\text{٥}} \qquad \text{د) } \text{٨}^{\text{٠}} = \text{١}$$

$$\text{هـ) } \text{٨}^{\text{٣}} + \text{٨}^{\text{٢}} = \text{٨}^{\text{٥}} \qquad \text{و) } \text{٨}^{\text{٣}} - \text{٨}^{\text{٢}} = (\text{٨}^{\text{٣}}+\text{١})(\text{٨}^{\text{٣}}-\text{١})$$

$$\text{ز) } \text{٨}^{\text{٣}} \times \text{٨}^{\text{٢}} = \text{٨}^{\text{٩}} \qquad \text{ح) } \text{٨}^{\text{٠}} \times \text{٨}^{\text{٣}} = \text{٨}^{\text{٣}}$$

$$\text{ط) } \text{٨}^{\text{٣}} \div \text{٨}^{\text{٢}} = \text{٨}^{\text{١}} \qquad \text{ي) } \text{٨}^{\text{٣}} \times \text{٨}^{\text{٢}} = \text{٨}^{\text{٦}}$$

س٨ : إذا كان ٨ = ٢ فأوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\text{أ) } \text{٨}^{\text{٣}} \times \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{ب) } \text{٨}^{\text{٣}} \div \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{جـ) } (\text{٨}^{\text{٣}})^{\text{٢}} \qquad \text{د) } \text{٨}^{\text{٣}} + \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{هـ) } \text{٨}^{\text{٣}} - \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{و) } \text{٨}^{\text{٠}}$$

س٩ : إذا كان ٨ = ٣ فأوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\text{أ) } \text{٨}^{\text{٣}} \times \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{ب) } \text{٨}^{\text{٣}} \div \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{جـ) } (\text{٨}^{\text{٣}})^{\text{٢}} \qquad \text{د) } \text{٨}^{\text{٣}} + \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{هـ) } \text{٨}^{\text{٣}} - \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{و) } \text{٨}^{\text{٠}}$$

س١٠ : إذا كان ٨ = ٤ فأوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\text{أ) } \text{٨}^{\text{٣}} \times \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{ب) } \text{٨}^{\text{٣}} \div \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{جـ) } (\text{٨}^{\text{٣}})^{\text{٢}} \qquad \text{د) } \text{٨}^{\text{٣}} + \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{هـ) } \text{٨}^{\text{٣}} - \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{و) } \text{٨}^{\text{٠}}$$

س١١ : إذا كان ٨ = ٥ فأوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\text{أ) } \text{٨}^{\text{٣}} \times \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{ب) } \text{٨}^{\text{٣}} \div \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{جـ) } (\text{٨}^{\text{٣}})^{\text{٢}} \qquad \text{د) } \text{٨}^{\text{٣}} + \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{هـ) } \text{٨}^{\text{٣}} - \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{و) } \text{٨}^{\text{٠}}$$

س١٢ : إذا كان ٨ = ٦ فأوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\text{أ) } \text{٨}^{\text{٣}} \times \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{ب) } \text{٨}^{\text{٣}} \div \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{جـ) } (\text{٨}^{\text{٣}})^{\text{٢}} \qquad \text{د) } \text{٨}^{\text{٣}} + \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{هـ) } \text{٨}^{\text{٣}} - \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{و) } \text{٨}^{\text{٠}}$$

س١٣ : إذا كان ٨ = ٧ فأوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\text{أ) } \text{٨}^{\text{٣}} \times \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{ب) } \text{٨}^{\text{٣}} \div \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{جـ) } (\text{٨}^{\text{٣}})^{\text{٢}} \qquad \text{د) } \text{٨}^{\text{٣}} + \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{هـ) } \text{٨}^{\text{٣}} - \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{و) } \text{٨}^{\text{٠}}$$

س١٤ : إذا كان ٨ = ٨ فأوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\text{أ) } \text{٨}^{\text{٣}} \times \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{ب) } \text{٨}^{\text{٣}} \div \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{جـ) } (\text{٨}^{\text{٣}})^{\text{٢}} \qquad \text{د) } \text{٨}^{\text{٣}} + \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{هـ) } \text{٨}^{\text{٣}} - \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{و) } \text{٨}^{\text{٠}}$$

س١٥ : إذا كان ٨ = ٩ فأوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\text{أ) } \text{٨}^{\text{٣}} \times \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{ب) } \text{٨}^{\text{٣}} \div \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{جـ) } (\text{٨}^{\text{٣}})^{\text{٢}} \qquad \text{د) } \text{٨}^{\text{٣}} + \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{هـ) } \text{٨}^{\text{٣}} - \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{و) } \text{٨}^{\text{٠}}$$

س١٦ : إذا كان ٨ = ١٠ فأوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\text{أ) } \text{٨}^{\text{٣}} \times \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{ب) } \text{٨}^{\text{٣}} \div \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{جـ) } (\text{٨}^{\text{٣}})^{\text{٢}} \qquad \text{د) } \text{٨}^{\text{٣}} + \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{هـ) } \text{٨}^{\text{٣}} - \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{و) } \text{٨}^{\text{٠}}$$

س١٧ : إذا كان ٨ = ١١ فأوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\text{أ) } \text{٨}^{\text{٣}} \times \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{ب) } \text{٨}^{\text{٣}} \div \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{جـ) } (\text{٨}^{\text{٣}})^{\text{٢}} \qquad \text{د) } \text{٨}^{\text{٣}} + \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{هـ) } \text{٨}^{\text{٣}} - \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{و) } \text{٨}^{\text{٠}}$$

س١٨ : إذا كان ٨ = ١٢ فأوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\text{أ) } \text{٨}^{\text{٣}} \times \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{ب) } \text{٨}^{\text{٣}} \div \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{جـ) } (\text{٨}^{\text{٣}})^{\text{٢}} \qquad \text{د) } \text{٨}^{\text{٣}} + \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{هـ) } \text{٨}^{\text{٣}} - \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{و) } \text{٨}^{\text{٠}}$$

س١٩ : إذا كان ٨ = ١٣ فأوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\text{أ) } \text{٨}^{\text{٣}} \times \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{ب) } \text{٨}^{\text{٣}} \div \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{جـ) } (\text{٨}^{\text{٣}})^{\text{٢}} \qquad \text{د) } \text{٨}^{\text{٣}} + \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{هـ) } \text{٨}^{\text{٣}} - \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{و) } \text{٨}^{\text{٠}}$$

س٢٠ : إذا كان ٨ = ١٤ فأوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\text{أ) } \text{٨}^{\text{٣}} \times \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{ب) } \text{٨}^{\text{٣}} \div \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{جـ) } (\text{٨}^{\text{٣}})^{\text{٢}} \qquad \text{د) } \text{٨}^{\text{٣}} + \text{٨}^{\text{٢}}$$

$$\text{هـ) } \text{٨}^{\text{٣}} - \text{٨}^{\text{٢}} \qquad \text{و) } \text{٨}^{\text{٠}}$$

تمرين محلول ٢ : لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين لدائرتين كما في الشكل :

$$\vec{u} \left| \begin{matrix} 2 \\ -\frac{8}{9} \end{matrix} \right. \quad \vec{v} \left| \begin{matrix} -\frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \end{matrix} \right. \quad \vec{u}+\vec{v} \left| \begin{matrix} -\frac{8}{3} \\ \frac{8}{9} \end{matrix} \right.$$

$$(2+8k)(-\frac{8}{3}+8k) = 1$$

$k = \frac{1}{30}$ هي القيمة الوحيدة لـ k التي تحقق الشرط المعطى

ليكن (a, b) شعاع الوضع لنقطة ما من الدائرة التي مركزها $(2, 0)$ ونصف قطرها 1. أوجد قيمة k بحيث يكون (a, b) و $(2+8k, -\frac{8}{3}+8k)$ مستقيمين.

الحل :

$$(a, b) = (2+8k, -\frac{8}{3}+8k) \Leftrightarrow \left[a = 2+8k \text{ و } b = -\frac{8}{3}+8k \right]$$

$$a^2 + b^2 = (2+8k)^2 + (-\frac{8}{3}+8k)^2$$

$$a^2 + b^2 = 4 + 32k + 64k^2 + \frac{64}{9} - \frac{128}{3}k + 64k^2$$

$$a^2 + b^2 = \frac{100}{9} - \frac{32}{3}k + 128k^2$$

لكن $a^2 + b^2 = 1$ لأن (a, b) شعاع الوضع لنقطة من الدائرة التي مركزها $(0, 0)$ ونصف قطرها 1.

$$\frac{100}{9} - \frac{32}{3}k + 128k^2 = 1$$

$$128k^2 - \frac{32}{3}k + \frac{91}{9} = 0$$

$$\Delta = \frac{1024}{9} - 4 \times 128 \times \frac{91}{9} = \frac{1024}{9} - \frac{46592}{9} = -\frac{45568}{9}$$

$\Delta < 0$ إذن المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$

لا توجد قيمة لـ k في $\mathbb{R}$ تحقق الشرط المعطى

تمرين محلول ٣ : لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين لدائرتين كما في الشكل :

$$\vec{u} \left| \begin{matrix} 2 \\ -\frac{8}{9} \end{matrix} \right. \quad \vec{v} \left| \begin{matrix} -\frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \end{matrix} \right. \quad \vec{u}+\vec{v} \left| \begin{matrix} -\frac{8}{3} \\ \frac{8}{9} \end{matrix} \right.$$

$$(2+8k)(-\frac{8}{3}+8k) = 1$$

$k = \frac{1}{30}$ هي القيمة الوحيدة لـ k التي تحقق الشرط المعطى

ليكن (a, b) شعاع الوضع لنقطة ما من الدائرة التي مركزها $(2, 0)$ ونصف قطرها 1. أوجد قيمة k بحيث يكون (a, b) و $(2+8k, -\frac{8}{3}+8k)$ مستقيمين.

الحل :

$$(a, b) = (2+8k, -\frac{8}{3}+8k) \Leftrightarrow \left[a = 2+8k \text{ و } b = -\frac{8}{3}+8k \right]$$

$$a^2 + b^2 = (2+8k)^2 + (-\frac{8}{3}+8k)^2$$

$$a^2 + b^2 = 4 + 32k + 64k^2 + \frac{64}{9} - \frac{128}{3}k + 64k^2$$

$$a^2 + b^2 = \frac{100}{9} - \frac{32}{3}k + 128k^2$$

لكن $a^2 + b^2 = 1$ لأن (a, b) شعاع الوضع لنقطة من الدائرة التي مركزها $(0, 0)$ ونصف قطرها 1.

$$\frac{100}{9} - \frac{32}{3}k + 128k^2 = 1$$

$$128k^2 - \frac{32}{3}k + \frac{91}{9} = 0$$

$$\Delta = \frac{1024}{9} - 4 \times 128 \times \frac{91}{9} = \frac{1024}{9} - \frac{46592}{9} = -\frac{45568}{9}$$

$\Delta < 0$ إذن المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$

لا توجد قيمة لـ k في $\mathbb{R}$ تحقق الشرط المعطى

ك دعوى وجدانى مغلق ح .

ولو فرضنا ت ، ر ، ن ، ح ، ح مجموعة الدعوى وجدانى :

فإذا ، فإذا ، لكل ، فإذا وجدانى مغلق حيث ك ⊂ ر ⊂ ن ⊂ ح ⊂ ح .

١ . ٥ مقومات فضاء وجدانى مغلق والفضاء مجلد

فإذا لكل ك = ١ + ح ∆ حيث ت ∈ ح ، ك

لدالة فضاء وجدانى مغلق ، (١ ، ح) ومقومة لها مؤثر حيث ت ∈ ح :

$$\| \Delta \| = \| ١ + ح \Delta \| = \sqrt{١ + ح^{٢}}$$

فإن مجلد لا بله لأن؟

ثم مجلد لا بله لأن؟

ثم مقومة وجدانى مغلق ح .

ولو فرضنا ت ، ر ، ن ، ح ، ح مجموعة الدعوى وجدانى :

فإذا ، فإذا ، لكل ، فإذا وجدانى مغلق حيث ك ⊂ ر ⊂ ن ⊂ ح ⊂ ح .

١ . ٥ مقومات فضاء وجدانى مغلق والفضاء مجلد

فإذا لكل ك = ١ + ح ∆ حيث ت ∈ ح ، ك

لدالة فضاء وجدانى مغلق ، (١ ، ح) ومقومة لها مؤثر حيث ت ∈ ح :

$$\| \Delta \| = \| ١ + ح \Delta \| = \sqrt{١ + ح^{٢}}$$

فإن مجلد لا بله لأن؟

ثم مقومة وجدانى مغلق ح .

ولو فرضنا ت ، ر ، ن ، ح ، ح مجموعة الدعوى وجدانى :

فإذا ، فإذا ، لكل ، فإذا وجدانى مغلق حيث ك ⊂ ر ⊂ ن ⊂ ح ⊂ ح .

١ . ٥ مقومات فضاء وجدانى مغلق والفضاء مجلد

فإذا لكل ك = ١ + ح ∆ حيث ت ∈ ح ، ك

لدالة فضاء وجدانى مغلق ، (١ ، ح) ومقومة لها مؤثر حيث ت ∈ ح :

$$\| \Delta \| = \| ١ + ح \Delta \| = \sqrt{١ + ح^{٢}}$$

فإن مجلد لا بله لأن؟

ثم مقومة وجدانى مغلق ح .

ولو فرضنا ت ، ر ، ن ، ح ، ح مجموعة الدعوى وجدانى :

فإذا ، فإذا ، لكل ، فإذا وجدانى مغلق حيث ك ⊂ ر ⊂ ن ⊂ ح ⊂ ح .

١ . ٥ مقومات فضاء وجدانى مغلق والفضاء مجلد

فإذا لكل ك = ١ + ح ∆ حيث ت ∈ ح ، ك

لدالة فضاء وجدانى مغلق ، (١ ، ح) ومقومة لها مؤثر حيث ت ∈ ح :

$$\| \Delta \| = \| ١ + ح \Delta \| = \sqrt{١ + ح^{٢}}$$

فإن مجلد لا بله لأن؟

ثم مقومة وجدانى مغلق ح .

ولو فرضنا ت ، ر ، ن ، ح ، ح مجموعة الدعوى وجدانى :

فإذا ، فإذا ، لكل ، فإذا وجدانى مغلق حيث ك ⊂ ر ⊂ ن ⊂ ح ⊂ ح .

١ . ٥ مقومات فضاء وجدانى مغلق والفضاء مجلد

فإذا لكل ك = ١ + ح ∆ حيث ت ∈ ح ، ك

لدالة فضاء وجدانى مغلق ، (١ ، ح) ومقومة لها مؤثر حيث ت ∈ ح :

$$\| \Delta \| = \| ١ + ح \Delta \| = \sqrt{١ + ح^{٢}}$$

فإن مجلد لا بله لأن؟

مثال في $\mathbb{R}^2$ المتجه $(1,1)$ يولد الفضاء الجزئي M حيث $M = \{k(1,1) : k \in \mathbb{R}\}$

الحل M هو مجموعة حلول المعادلة $x - y = 0$ أي أن $M = \{(x,y) : x - y = 0\}$

$\|u\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ فإن $u = (1,1)$ إذا كان

$$\text{proj}_M v = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u \qquad \text{proj}_M w = \frac{\langle w, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

تعريف (٨.١) ليكن M فضاء جزئيا في فضاء الجداء الداخلي V نعرف المتممة العمودية للفضاء الجزئي M بالمجموعة

$$M^{\perp} = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \text{ لكل } u \in M\}$$

مثال في $\mathbb{R}^2$ المتجه $(1,1)$ يولد الفضاء الجزئي M حيث $M = \{k(1,1) : k \in \mathbb{R}\}$

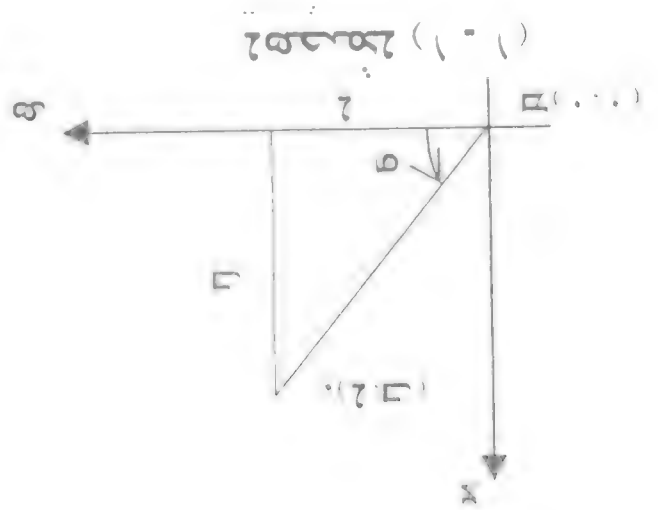
الحل M هو مجموعة حلول المعادلة $x - y = 0$ أي أن $M = \{(x,y) : x - y = 0\}$

$\|u\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ فإن $u = (1,1)$ إذا كان

$$\text{proj}_M v = \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u \qquad \text{proj}_M w = \frac{\langle w, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

تعريف (٨.١) ليكن M فضاء جزئيا في فضاء الجداء الداخلي V نعرف المتممة العمودية للفضاء الجزئي M بالمجموعة

$$M^{\perp} = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \text{ لكل } u \in M\}$$



لإيجاد مجموعة جزئية في $\mathbb{R}^2$ يمر بالمبدأ $\overrightarrow{OA}$ حيث A نقطة على المستقيم $y = x$ نتبع الخطوات التالية:

$$\cos\theta = \frac{ل}{\sqrt{ل^2 + ب^2}} \qquad \text{حيث } (ل، ب) \neq (٠،٠)$$

$$\sin\theta = \frac{ب}{\sqrt{ل^2 + ب^2}} = \frac{ب}{ل} \qquad \text{حيث } (ل، ب) \neq (٠،٠)$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{ب}{ل}$$

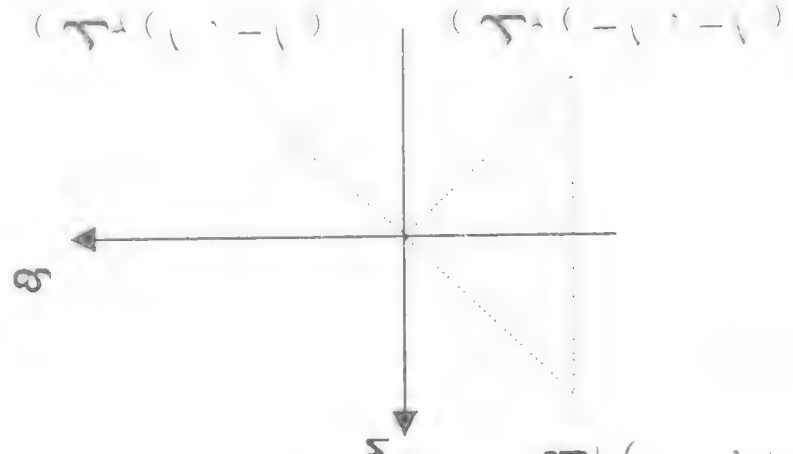
فإذا فرضنا أن θ هي مجموعة الزوايا التي يصنعها $\overrightarrow{OA}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن مجموعة جميع الزوايا التي يصنعها $\overrightarrow{OA}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هي $\theta + 2\pi n$ حيث $n \in \mathbb{Z}$ أو بكتابة أخرى مجموعة جميع الزوايا التي يصنعها $\overrightarrow{OA}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هي $\theta + 2\pi$ حيث θ هي مجموعة الزوايا التي يصنعها $\overrightarrow{OA}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات في الفترة $[0, 2\pi)$

ولما متجه وحدة في اتجاه $\vec{u}_1$ هو $\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}$ ، $\vec{u}_1 = (-1, 1)$

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}$$



$$\|\vec{u}_2\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \text{متجه إشعاع المتجه } \vec{u} \text{ هو } \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$\|\vec{u}_3\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\theta = -1 \quad , \quad \theta = \frac{7\pi}{4}$$

مثال جد سعة وتمثيلها الهندسي لكل من $(1, -1)$ ثم جد متجه

إشعاع المتجه $(-2, 0)$.

الحل نفرض أن $\vec{u}_1 = (-1, 1)$ ، $\vec{u}_2 = (-1, -1)$ ،

$\vec{u}_3 = (1, -1)$ هي متجهات الموضع للنقط المعطاة

على الترتيب.

خطوة (١) نجد أولاً متجه الوحدة في اتجاه كل من $\vec{u}_1$ ، $\vec{u}_2$ ، $\vec{u}_3$

ثم نجد سعة كل منها.

لأن متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\vec{u}$ هو $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ ، حيث $\vec{u} \neq \vec{0}$.

$\vec{u}_1 = (-1, 1)$

$$\|\vec{u}_1\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$\vec{u}_2 = (-1, -1)$

$$\|\vec{u}_2\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \text{متجه إشعاع المتجه } \vec{u} \text{ هو } \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$\vec{u}_3 = (1, -1)$

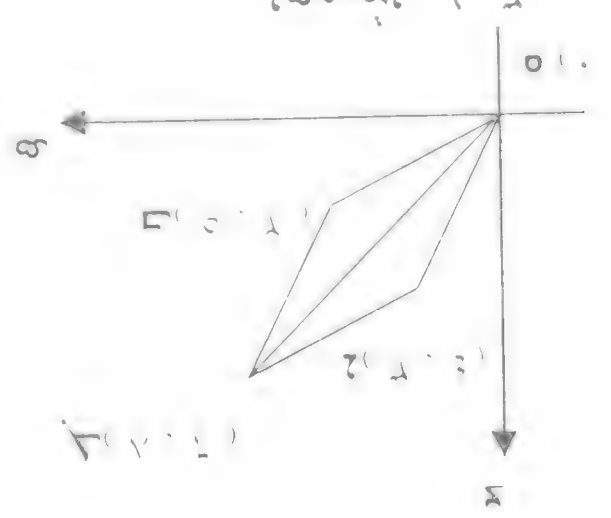
$$\|\vec{u}_3\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\theta = -1 \quad , \quad \theta = \frac{7\pi}{4}$$

ب) عندما : $(٦\,\vec{i}-٢\,\vec{j})-(٢\,\vec{i}-٥\,\vec{j})=٤\,\vec{i}+٣\,\vec{j}$

بذلك متجه الإزاحة من $\overrightarrow{ب}$ إلى $\overrightarrow{ج}$ هو $٤\,\vec{i}+٣\,\vec{j}$



متجه الإزاحة من $\overrightarrow{أ}$ إلى $\overrightarrow{ب}$ = متجه الإزاحة من $\overrightarrow{و}$ إلى $\overrightarrow{د}$

مثال متجه الإزاحة من $\overrightarrow{أ}$ إلى $\overrightarrow{ب}$: $(٣\,\vec{i}+٤\,\vec{j})+(٥\,\vec{i}+٢\,\vec{j})=(٨\,\vec{i}+٦\,\vec{j})$

أوجد متجه الإزاحة من $\overrightarrow{ب}$ إلى $\overrightarrow{أ}$ حيث $\overrightarrow{أ}=٣\,\vec{i}+٤\,\vec{j}$ ، $\overrightarrow{ب}=٥\,\vec{i}+٢\,\vec{j}$

الحل

متجه الإزاحة من $\overrightarrow{ب}$ إلى $\overrightarrow{أ}$ = $(٣\,\vec{i}+٤\,\vec{j})-(٥\,\vec{i}+٢\,\vec{j})$

$=(٣-٥)\,\vec{i}+(٤-٢)\,\vec{j}$

$=-٢\,\vec{i}+٢\,\vec{j}$

أوجد $\|\overrightarrow{أ}\|$ ، θ حيث $\overrightarrow{أ}=٣\,\vec{i}+٣\,\vec{j}$ حيث θ قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها $\overrightarrow{أ}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

الحل

$\|\overrightarrow{أ}\|=\sqrt{٣^{٢}+٣^{٢}}=\sqrt{١٨}=٣\sqrt{٢}$

$\tan\theta=\frac{٣}{٣}=١$

$\theta=\frac{\pi}{٤}$

مثال أوجد متجه الإزاحة من $\overrightarrow{ب}$ إلى $\overrightarrow{أ}$ حيث $\overrightarrow{أ}=٣\,\vec{i}+٤\,\vec{j}$ ، $\overrightarrow{ب}=٥\,\vec{i}+٢\,\vec{j}$

الحل

متجه الإزاحة من $\overrightarrow{ب}$ إلى $\overrightarrow{أ}$ = $(٣\,\vec{i}+٤\,\vec{j})-(٥\,\vec{i}+٢\,\vec{j})$

$=(٣-٥)\,\vec{i}+(٤-٢)\,\vec{j}$

$=-٢\,\vec{i}+٢\,\vec{j}$

مثال أوجد متجه الإزاحة من $\overrightarrow{أ}$ إلى $\overrightarrow{ب}$ حيث $\overrightarrow{أ}=٣\,\vec{i}+٤\,\vec{j}$ ، $\overrightarrow{ب}=٥\,\vec{i}+٢\,\vec{j}$

الحل

متجه الإزاحة من $\overrightarrow{أ}$ إلى $\overrightarrow{ب}$ = $(٥\,\vec{i}+٢\,\vec{j})-(٣\,\vec{i}+٤\,\vec{j})$

$=(٥-٣)\,\vec{i}+(٢-٤)\,\vec{j}$

$=٢\,\vec{i}-٢\,\vec{j}$

مثال إذا كان $\overrightarrow{أ}=٣\,\vec{i}+٤\,\vec{j}$ ، $\overrightarrow{ب}=٥\,\vec{i}+٢\,\vec{j}$ فأوجد متجه الإزاحة من $\overrightarrow{ب}$ إلى $\overrightarrow{أ}$

الحل

متجه الإزاحة من $\overrightarrow{ب}$ إلى $\overrightarrow{أ}$ = $(٣\,\vec{i}+٤\,\vec{j})-(٥\,\vec{i}+٢\,\vec{j})$

$=(٣-٥)\,\vec{i}+(٤-٢)\,\vec{j}$

$=-٢\,\vec{i}+٢\,\vec{j}$

مثال إذا كان $\overrightarrow{أ}=٣\,\vec{i}+٤\,\vec{j}$ ، $\overrightarrow{ب}=٥\,\vec{i}+٢\,\vec{j}$ فأوجد متجه الإزاحة من $\overrightarrow{أ}$ إلى $\overrightarrow{ب}$

الحل

متجه الإزاحة من $\overrightarrow{أ}$ إلى $\overrightarrow{ب}$ = $(٥\,\vec{i}+٢\,\vec{j})-(٣\,\vec{i}+٤\,\vec{j})$

$=(٥-٣)\,\vec{i}+(٢-٤)\,\vec{j}$

$=٢\,\vec{i}-٢\,\vec{j}$

مثال أوجد متجه الإزاحة من $\overrightarrow{ب}$ إلى $\overrightarrow{ج}$ حيث $\overrightarrow{ب}=٢\,\vec{i}-٥\,\vec{j}$ ، $\overrightarrow{ج}=٦\,\vec{i}-٢\,\vec{j}$

الحل

متجه الإزاحة من $\overrightarrow{ب}$ إلى $\overrightarrow{ج}$ = $(٦\,\vec{i}-٢\,\vec{j})-(٢\,\vec{i}-٥\,\vec{j})$

$=(٦-٢)\,\vec{i}+(-٢+٥)\,\vec{j}$

$=٤\,\vec{i}+٣\,\vec{j}$

$ص_{٢} = -١٦$ ، $ص_{٢} - ٦ص + ٣١ = ٠$ ولذلك فإن عدد أى حدوده يساوى

عدد حلوله يساوى عدد حلول أى معادلة من درجته.

الحل (٢٢) المعادلة $ص^{٤} - ٨ص^{٣}$ ، $-٤ص^{٢} + ٨ص$ لها نفس عدد حلول

المعادلة $ص_{٢} = -١٦$

وإذا كان $(-٨)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٦٤ = ١٦ - ٨ = -١٦$

وإذا كان المعادلة $ص_{٢} = -١٦$ فإن لها حلين مختلفين.

الحل (٢٣) المعادلة $ع^{٢} = -٤$ لها حلان مختلفان هما $\sqrt{-٨}$ ، $-\sqrt{-٨}$

فإن عدد حلول المعادلة يساوى ٢ حيث لكل عدد يساوى نفسه له جذران

عدد حلول المعادلة $\sqrt{\ }$ هما الحلول :

$\sqrt{-٣٢} = \sqrt{٣٢ \times -١}$ ، $\sqrt{-١٦} = \sqrt{١٦ \times -١}$

١ ـ ٦ العدد المركب له صـ

سوف يدرس فى الفصول القادمة حلول المعادلة من الدرجة الثانية فقط ولكن

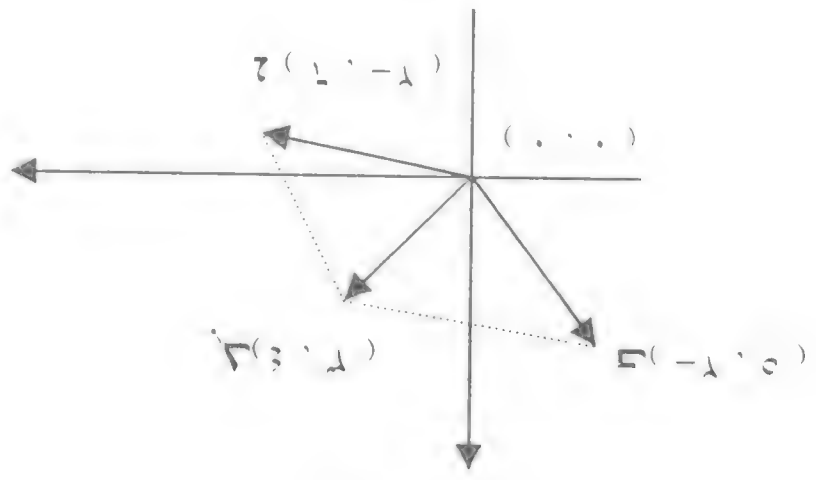
عند المعادلة أيضاً :

المعادلة : $(٢ - ٢ \times ٨) + (-٢ + ٥ \times ٨)$

$(٦ ، -٢)$ الحل حيث العدد ع $(٦ ، -٢)$

$(-٢ ، ٥)$ الحل حيث العدد د $(-٢ ، ٥)$

م هو عكس عدد ل $(٣ ، ٤)$ الحل حيث العدد ن $(٤ ، -٣)$



$$\frac{\sqrt{9}}{3}\times 8=\frac{3}{2}\times 8=\frac{\sqrt{9-}}{4}\times 8=\frac{\sqrt{4}}{2}\times 8$$

ومنه يمكن حساب $\sqrt{-16}$ بأحد الطرق السابقة فنجد $\sqrt{-16}=\sqrt{16}\times\sqrt{-1}=4\times 1\times 2=8$

(25) أوجد مجموعة حل المعادلة $x^2-6x+13=0$ في $\mathbb{R}$

$x^2-6x+13=0$ نضيف ونطرح 3^2

$x^2-6x+9-9+13=0$

$(x-3)^2+4=0$

$(x-3)^2=-4$ بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$x-3=\pm\sqrt{-4}$

$x-3=\pm 2i$

$x=3\pm 2i$

$S=\{3+2i, 3-2i\}$

(26) أوجد مجموعة حل المعادلة $x^2-6x+13=0$ في $\mathbb{C}$

نفس الحل السابق

$x=3\pm 2i$

$S=\{3+2i, 3-2i\}$

(27) أوجد مجموعة حل المعادلة $x^2+4=0$ في $\mathbb{C}$

$x^2=-4$

$x=\pm\sqrt{-4}$

$x=\pm 2i$

$S=\{2i, -2i\}$

(28) أوجد مجموعة حل المعادلة $x^2+9=0$ في $\mathbb{C}$

$x^2=-9$

$x=\pm\sqrt{-9}$

$x=\pm 3i$

$S=\{3i, -3i\}$

(29) أوجد مجموعة حل المعادلة $x^2+2x+5=0$ في $\mathbb{C}$

$x^2+2x+1-1+5=0$

$(x+1)^2+4=0$

$(x+1)^2=-4$

$x+1=\pm\sqrt{-4}$

$x+1=\pm 2i$

$x=-1\pm 2i$

$S=\{-1+2i, -1-2i\}$

$\therefore s = \pm 3$

$s \in$ ط فإن $s^2 - 16 = 0 \Rightarrow s^2 = 16 \Rightarrow s = \pm 4$ ؛

$(s^2 - 16)(s^2 + 9) = 0 \Rightarrow$ بما $s^2 + 9 = 0 \Rightarrow s^2 = -9$ فيرفض

$s^4 - 28s^2 + 144 = 0 \Rightarrow$

$s^4 - \frac{s^2}{144} = 7 \Rightarrow$

$s^4 - \frac{s^2}{12} = 7 \Rightarrow$ بالضرب في المقدار (2) على المقدار (1) نجد

$s^2 = 12 \Rightarrow s = \frac{s}{\dots\dots\dots\dots(2)}$

$2s s = 24$ نجد أن (2) نجد

$\therefore s_2 - s_1 = 7 \dots\dots\dots\dots(1)$

$7 + 48 = s_2 - s_1 + 2s s$

$7 + 48 = s_1 + 2s s + s_1 \Rightarrow$

$7 + 48 = s + s s + s \Rightarrow$ بتربيع الطرفين $\sqrt{(7 + 48)} = s + s \Rightarrow$

ملحوظة يمكن إيجاد المقدار $(7 + 48)$ بطريقة أخرى كما يلي

الخطوة (٢٢) نفرض أن المقدار $= s$

الخطوة (٢٣) نأخذ مرافق s وهو $\frac{1}{s}$

الخطوة (٢٤) $s \times \frac{1}{s} = 1$

الخطوة (٢٥) $s + \frac{1}{s} = 14$

الخطوة (٢٦) $s^2 + \frac{1}{s^2} = 196 - 2 = 194$

الخطوة (٢٧) $s^3 + \frac{1}{s^3} = 14 \times 194 - 14 = 2702$

الخطوة (٢٨) $s^4 + \frac{1}{s^4} = 194^2 - 2 = 37634$

الخطوة (٢٩) $s^4 + \frac{1}{s^4} + 1 = 37635$

الخطوة (٣٠) $\sqrt{s^4 + \frac{1}{s^4} + 1} = 194$

الخطوة (٣١) $\sqrt{s^4 + \frac{1}{s^4} + 1} = s^2 + \frac{1}{s^2}$

الخطوة (٣٢) $\sqrt{s^4 + \frac{1}{s^4} + 1} = s + \frac{1}{s}$

الخطوة (٣٣) $\sqrt{s^4 + \frac{1}{s^4} + 1} = \sqrt{(s + \frac{1}{s})^2}$

الخطوة (٣٤) $\sqrt{s^4 + \frac{1}{s^4} + 1} = \sqrt{(7 + 48)^2}$

الخطوة (٣٥) $\sqrt{s^4 + \frac{1}{s^4} + 1} = 7 + 48$

الخطوة (٣٦) $\sqrt{s^4 + \frac{1}{s^4} + 1} = 7 + 48$

ملاحظة

مما سبق نلاحظ أن طريقة إيجاد المقدار (مرافق) تعتمد على :

نوجد مرافق المقدار s حيث s على الصورة $s^2 + b s + = = 0$ ، $a \neq 0$ حيث $a, b, c \in$ ط وبضرب a ، b ، c في s نجد أن

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

الخطوة (٣٦) إذا كان $s^2 - 8s + 5 = 0$ فأوجد قيمة s

الخطوة (٣٧)

$$s = \frac{-(-8) \pm \sqrt{64 - 4 \times 4 \times 5}}{8}$$

الخطوة (٣٨) أوجد قيمة المقدار $(7 + 48)$

∴ $ق_{ن+١} = ٨ س_{ن} + ق_{ن}$ ومنها نجد أن $٨ = \frac{١}{١} - \frac{١}{٢١} - = ٨ س_{١} + ق_{١}$

∴ $ق_{١} + ٨ س_{١} = \frac{١}{٢١} + \frac{١}{١} = ٨$

∴ $س_{١} = \pm \frac{١}{٢١}$

∴ $ق_{٢} = \frac{٣}{١} \Rightarrow ق_{١} = \pm \frac{١}{٢١}$

$\Rightarrow$ ∴ $ق_{ن+٢} - ٢ ق_{ن+١} + ق_{ن} = ٠$ فإن المتتابعة ذات الحد العام $ق_{ن}$ حيث $ن \in ط$

$\Rightarrow (ق_{ن+٢} - ق_{ن+١}) - (ق_{ن+١} - ق_{ن}) = ٠$

$ع_{ن} = ق_{ن+١} - ق_{ن}$ ؛

$ع_{ن+١} - ع_{ن} = ٠ \Rightarrow ٤ ع_{ن} - ١ = ٠$

$ق_{١} - (\frac{ق_{٢}}{١})^{٢} = ٠$

ومن المعادلة (١) نجد المعادلة (٢) ثم المعادلة (٣) بالتعويض

$٢ ق_{١} س_{١} = ١ \Rightarrow س_{١} = \frac{ق_{٢}}{١}$ ..... (٢)

$ق_{١} - س_{١}^{٢} = ٠$ ..... (١)

$\Rightarrow ٨ س_{١}^{٢} + ٢ ق_{١} س_{١} - ق_{١}^{٢} + ١ + ٠ = ١٨$

$\Rightarrow ٨ س_{١}^{٢} + ٢ ق_{١} س_{١} = ق_{١}^{٢} - س_{١}^{٢} + ٨$

$\Rightarrow ٨ س_{١}^{٢} + ق_{١} = \sqrt{٨}$ بتربيع الطرفين

ملحوظة يمكن إيجاد حد عام المتتابعة ٨ بالطريقة السابقة

∴ $٨ س_{١} + ق_{١} = ٣ + ٤$

∴ $٨ س_{١} + ق_{١} = -٣ - ٤ = -٧$

ومنها يمكن إيجاد

س١) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ظا ص = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ فإن ص =

أجب عن واحد فقط :

أ) $\frac{\pi}{٤}$ ب) $\frac{\pi}{٣}$ ج) $\frac{\pi}{٦}$ د) $\frac{\pi}{٥}$

س٢) إذا كان ظا س = ظا ٣٠° ظتا ٣٠° فإن س =

أ) ٣٠° ب) ٦٠° ج) ٤٥° د) ٩٠°

س٣) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن ظا س =

أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ب) $-\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ج) $\sqrt{٣}$ د) $-\sqrt{٣}$

س٤) إذا كان ظا س = $\frac{٣}{٤}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا س =

أ) $\frac{٤}{٥}$ ب) $-\frac{٤}{٥}$ ج) $\frac{٣}{٥}$ د) $-\frac{٣}{٥}$

س٥) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٦) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٧) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٨) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٩) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س١٠) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س١١) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س١٢) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س١٣) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س١٤) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س١٥) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س١٦) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س١٧) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س١٨) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س١٩) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٢٠) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٢١) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٢٢) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٢٣) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٢٤) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٢٥) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٢٦) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٢٧) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٢٨) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٢٩) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٣٠) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٣١) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٣٢) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٣٣) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٣٤) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٣٥) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٣٦) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٣٧) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٣٨) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٣٩) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٤٠) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٤١) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٤٢) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٤٣) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٤٤) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٤٥) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٤٦) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٤٧) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٤٨) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٤٩) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٥٠) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٥١) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٥٢) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٥٣) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٥٤) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٥٥) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٥٦) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٥٧) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٥٨) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٥٩) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٦٠) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٦١) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٦٢) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٦٣) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٦٤) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٦٥) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٦٦) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٦٧) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٦٨) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٦٩) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٧٠) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٧١) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٧٢) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٧٣) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٧٤) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٧٥) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٧٦) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٧٧) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٧٨) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٧٩) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٨٠) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٨١) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٨٢) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٨٣) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٨٤) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٨٥) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٨٦) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٨٧) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٨٨) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٨٩) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٩٠) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٩١) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٩٢) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٩٣) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٩٤) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٩٥) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٩٦) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٩٧) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٩٨) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س٩٩) إذا كان حتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، س ∈ $]\frac{\pi}{٢}, \pi[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

س١٠٠) إذا كان ظا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، س ∈ $]\pi, \frac{٣\pi}{٢}[$ فإن حتا ٢س =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

١٠ ٨ رقم وقيمة المكان في عدد

تعطي الخوارزمية التالية لإيجاد رقم الآحاد والعشرات في عدد صحيح موجب معلوم. ونحتاج لتطبيق هذه الخوارزمية إلى عملية القسمة الصحيحة وعملية باقي القسمة على عدد.

إذا كان المطلوب هو رقم الآحاد فإن الخطوات:

$A_1 = 1$

$A_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow (A_2 - 1)(A_2^2 + A_2 + 1) = 0$

$\Leftarrow A_2 = 1$ أو $A_2 - 1 = 0 \Rightarrow A_2 = 1$

أو $A_2^2 + A_2 + 1 = 0$ ، $A_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

وهذه المعادلة ليس لها حل حقيقي إذا كان المطلوب إيجاد رقم الآحاد

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $-\frac{1}{2}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $-\frac{1}{2}$ ، ١

١٠ ٨ رقم وقيمة المكان في عدد

تعطي الخوارزمية التالية لإيجاد رقم الآحاد والعشرات في عدد صحيح موجب معلوم. ونحتاج لتطبيق هذه الخوارزمية إلى عملية القسمة الصحيحة وعملية باقي القسمة على عدد.

إذا كان المطلوب هو رقم الآحاد فإن الخطوات:

$A_1 = 1$

$A_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow (A_2 - 1)(A_2^2 + A_2 + 1) = 0$

$\Leftarrow A_2 = 1$ أو $A_2 - 1 = 0 \Rightarrow A_2 = 1$

أو $A_2^2 + A_2 + 1 = 0$ ، $A_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

وهذه المعادلة ليس لها حل حقيقي إذا كان المطلوب إيجاد رقم الآحاد

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $-\frac{1}{2}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $-\frac{1}{2}$ ، ١

$$\text{ومنه } (\frac{-١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ هـ})^{٣} = \frac{١}{٤} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ هـ} - \frac{٣}{٤} = -\frac{٢}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ هـ}$$

مثال نفرض أن جـ هي متجه بالنسبة لـ ب ، د فوجد متجه بالنسبة لـ ب٢

الحل نفرض أن جـ هي متجه بالنسبة لـ ب ، د فوجد متجه بالنسبة لـ ب٢ :

$$\text{ب}_{١}^{٣} = ١ \quad \ldots\ldots\ldots\

= طول القطر = وتر الدائرة

الحل (٢٢) نعين نقطة تقاطع القطرين بالرمز م

$$\text{م}_{\text{ص}} = \frac{\text{ص}_{\text{٢}} + \text{ص}_{\text{١}}}{\text{٢}} = \frac{\text{٣} + \text{٥}}{\text{٢}} = \text{٤}$$

$$\text{م}_{\text{س}} = \frac{\text{س}_{\text{٢}} + \text{س}_{\text{١}}}{\text{٢}} = \frac{\text{٢} + \text{٠}}{\text{٢}} = \text{١}$$

$$\text{ق}(\text{م}\,\text{ب}) = \sqrt{(\text{س}_{\text{٢}} - \text{س}_{\text{م}})^{\text{٢}} + (\text{ص}_{\text{٢}} - \text{ص}_{\text{م}})^{\text{٢}}}$$

$$= \sqrt{(\text{٠} - \text{١})^{\text{٢}} + (\text{٣} - \text{٤})^{\text{٢}}}$$

$$= \sqrt{(-\text{١})^{\text{٢}} + (-\text{١})^{\text{٢}}}$$

$$= \sqrt{\text{١} + \text{١}}$$

$$= \sqrt{\text{٢}}$$

طول القطر = $\text{٢}\sqrt{\text{٢}}$ وحدة طول

الحل (٢١) نعوض عن $\text{س} = \text{١}$ ، $\text{ص} = \text{٠}$ في معادلة الدائرة

$$\text{١} + \text{٠} + \text{ء} = \text{٠}$$

ومنها $\text{ء} = -\text{١}$

الحل (٢٢) معادلة الدائرة هي: $(\text{س} - \text{ه})^{\text{٢}} + (\text{ص} - \text{و})^{\text{٢}} = \text{ن}^{\text{٢}}$

$$(\text{س} - \text{١})^{\text{٢}} + (\text{ص} - \text{٢})^{\text{٢}} = \text{٢}^{\text{٢}}$$

$$\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢س} + \text{١} + \text{ص}^{\text{٢}} - \text{٤ص} + \text{٤} = \text{٤}$$

$$\text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}} - \text{٢س} - \text{٤ص} + \text{١} = \text{٠}$$

الحل $\text{ق}(\text{أ}\,\text{ب}) = \sqrt{(\text{٣} - \text{١})^{\text{٢}} + (\text{٤} - \text{٢})^{\text{٢}}}$

$$= \sqrt{\text{٤} + \text{٤}}$$

$$= \sqrt{\text{٨}}$$

$$= \text{٢}\sqrt{\text{٢}}$$

الحل $\text{ق}(\text{أ}\,\text{ب}) = \sqrt{(\text{٥} - \text{٢})^{\text{٢}} + (\text{٣} - \text{٠})^{\text{٢}}}$

$$= \sqrt{\text{٩} + \text{٩}}$$

$$= \sqrt{\text{١٨}}$$

$$= \text{٣}\sqrt{\text{٢}}$$

الحل $\text{ق}(\text{أ}\,\text{ب}) = \sqrt{(\text{٤} - \text{٠})^{\text{٢}} + (\text{٠} - \text{٣})^{\text{٢}}}$

$$= \sqrt{\text{١٦} + \text{٩}}$$

$$= \sqrt{\text{٢٥}}$$

$$= \text{٥}$$

الحل $\text{ق}(\text{أ}\,\text{ب}) = \sqrt{(\text{٣} - \text{٠})^{\text{٢}} + (\text{٠} - \text{٤})^{\text{٢}}}$

$$= \sqrt{\text{٩} + \text{١٦}}$$

$$= \sqrt{\text{٢٥}}$$

$$= \text{٥}$$

الحل $\text{ق}(\text{أ}\,\text{ب}) = \sqrt{(\text{٥} - \text{٢})^{\text{٢}} + (\text{٣} - \text{٠})^{\text{٢}}}$

$$= \sqrt{\text{٩} + \text{٩}}$$

$$= \sqrt{\text{١٨}}$$

$$= \text{٣}\sqrt{\text{٢}}$$

الحل $\text{ق}(\text{أ}\,\text{ب}) = \sqrt{(\text{٤} - \text{٠})^{\text{٢}} + (\text{٠} - \text{٣})^{\text{٢}}}$

$$= \sqrt{\text{١٦} + \text{٩}}$$

$$= \sqrt{\text{٢٥}}$$

$$= \text{٥}$$

الحل $\text{ق}(\text{أ}\,\text{ب}) = \sqrt{(\text{٣} - \text{١})^{\text{٢}} + (\text{٤} - \text{٢})^{\text{٢}}}$

$$= \sqrt{\text{٤} + \text{٤}}$$

$$= \sqrt{\text{٨}}$$

$$= \text{٢}\sqrt{\text{٢}}$$

الحل $\text{ق}(\text{أ}\,\text{ب}) = \sqrt{(\text{٥} - \text{٢})^{\text{٢}} + (\text{٣} - \text{٠})^{\text{٢}}}$

$$= \sqrt{\text{٩} + \text{٩}}$$

$$= \sqrt{\text{١٨}}$$

$$= \text{٣}\sqrt{\text{٢}}$$

الحل $\text{ق}(\text{أ}\,\text{ب}) = \sqrt{(\text{٤} - \text{٠})^{\text{٢}} + (\text{٠} - \text{٣})^{\text{٢}}}$

$$= \sqrt{\text{١٦} + \text{٩}}$$

$$= \sqrt{\text{٢٥}}$$

$$= \text{٥}$$

الحل $\text{ق}(\text{أ}\,\text{ب}) = \sqrt{(\text{٣} - \text{٠})^{\text{٢}} + (\text{٠} - \text{٤})^{\text{٢}}}$

$$= \sqrt{\text{٩} + \text{١٦}}$$

$$= \sqrt{\text{٢٥}}$$

$$= \text{٥}$$

$$= \frac{٣}{٣} \left(\frac{٢ + ٤ن}{ن + ٢} - \frac{٢ + ٤ن}{ن + ٢} \right)$$ د) بما أن

$$= \frac{٣}{٣} (١ - ١) = ٠$$

السؤال الرابع (٣٢)

أ) أوجد مفكوك $(٢ن + ١)^{٨}$ في أسس متزايدة بدلالة ن

الحل

$$= ١ + ٨ن + ٢٨ن^{٢} + ٥٦ن^{٣} + ٧٠ن^{٤} + \ldots$$

ب) أوجد الحد الذي يحتوي على $ن^{٣}$ في مفكوك $\left(ن^{٢} - \frac{١}{ن} \right)^{٩}$

الحل

$$ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} (ن^{٢})^{٩-ر} \left(-\frac{١}{ن} \right)^{ر}$$

$$= {}^{٩}ق_{ر} (-١)^{ر} ن^{١٨-٣ر}$$

$$١٨ - ٣ر = ٣$$

$$ر = ٥$$

$$\therefore \text{الحد المطلوب} = {}^{٩}ق_{٥} (-١)^{٥} ن^{٣} = -١٢٦ ن^{٣}$$

ج) أوجد قيمة $ن$ التي تجعل $٢ن + ٨ ، ن + ٣ ، ن + ٨$ حدوداً متتالية في متتابعة حسابية

الحل

$$ن + ٣ - (ن + ٨) = ن + ٨ - (ن + ٣)$$

$$-٥ = -٥$$

$$\therefore \text{المتتابعة حسابية}$$

$$\text{الحد الأول} = ن + ٨ = ٣ + ٨ = ١١$$

$$\text{أساس المتتابعة} = ن + ٣ - ن - ٨ = -٥$$

$$\text{مجموع } ٢٠ \text{ حداً} = \frac{٢٠}{٢} [٢ \times ١١ + (٢٠ - ١)(-٥)]$$

$$= ١٠ [٢٢ - ٩٥] = -٧٣٠$$

د) أوجد قيمة $ن$ التي تجعل $٩ + ٢٢ن + ١٥ن^{٢} + \ldots$ متقاربة

الحل

$$\text{المتتابعة متقاربة} \Leftrightarrow |\text{أساس}| < ١$$

$$|ن| < ١$$

$$-١ < ن < ١$$

$$\text{أساس المتتابعة} = \frac{٢٢ن}{٩} = \frac{١٥ن^{٢}}{٢٢ن} = \frac{٧ن}{١١}$$

$$\therefore -١ < \frac{٧ن}{١١} < ١$$

$$-\frac{١١}{٧} < ن < \frac{١١}{٧}$$

هـ) أوجد مفكوك $(٢ن - ١)^{٥}$ في أسس متزايدة بدلالة ن

الحل

$$= ١ - ١٠ن + ٤٠ن^{٢} - ٨٠ن^{٣} + ٨٠ن^{٤} - ٣٢ن^{٥}$$

و) أوجد الحد الأوسط في مفكوك $\left(٢ن^{٢} - \frac{١}{ن} \right)^{٨}$

الحل

$$\text{عدد الحدود} = ٨ + ١ = ٩$$

$$\text{الحد الأوسط} = \text{الحد الخامس}$$

$$ح_{٥} = {}^{٨}ق_{٤} (٢ن^{٢})^{٤} \left(-\frac{١}{ن} \right)^{٤}$$

$$= ١٦ن^{٨}$$

ز) أوجد قيمة $ن$ التي تجعل $٢ن + ١ ، ن + ١ ، ن + ٤$ حدوداً متتالية في متتابعة هندسية

الحل

$$\frac{ن + ١}{٢ن + ١} = \frac{ن + ٤}{ن + ١}$$

$$(ن + ١)^{٢} = (٢ن + ١)(ن + ٤)$$

$$ن^{٢} + ٢ن + ١ = ٢ن^{٢} + ٩ن + ٤$$

$$ن^{٢} + ٧ن + ٣ = ٠$$

$$ن = \frac{-٧ \pm \sqrt{٧^{٢} - ٤ \times ١ \times ٣}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{-٧ \pm \sqrt{٣٧}}{٢}$$

ح) أوجد قيمة $ن$ التي تجعل $٢ن + ٨ ، ن + ٣ ، ن + ٨$ حدوداً متتالية في متتابعة حسابية

الحل

$$ن + ٣ - (ن + ٨) = ن + ٨ - (ن + ٣)$$

$$-٥ = -٥$$

$$\therefore \text{المتتابعة حسابية}$$

$$\text{الحد الأول} = ن + ٨ = ٣ + ٨ = ١١$$

$$\text{أساس المتتابعة} = ن + ٣ - ن - ٨ = -٥$$

$$\text{مجموع } ٢٠ \text{ حداً} = \frac{٢٠}{٢} [٢ \times ١١ + (٢٠ - ١)(-٥)]$$

$$= ١٠ [٢٢ - ٩٥] = -٧٣٠$$

ط) أوجد قيمة $ن$ التي تجعل $٩ + ٢٢ن + ١٥ن^{٢} + \ldots$ متقاربة

الحل

$$\text{المتتابعة متقاربة} \Leftrightarrow |\text{أساس}| < ١$$

$$|ن| < ١$$

$$-١ < ن < ١$$

$$\text{أساس المتتابعة} = \frac{٢٢ن}{٩} = \frac{١٥ن^{٢}}{٢٢ن} = \frac{٧ن}{١١}$$

$$\therefore -١ < \frac{٧ن}{١١} < ١$$

$$-\frac{١١}{٧} < ن < \frac{١١}{٧}$$

ي) أوجد مفكوك $(٢ن - ١)^{٥}$ في أسس متزايدة بدلالة ن

الحل

$$= ١ - ١٠ن + ٤٠ن^{٢} - ٨٠ن^{٣} + ٨٠ن^{٤} - ٣٢ن^{٥}$$

ك) أوجد الحد الأوسط في مفكوك $\left(٢ن^{٢} - \frac{١}{ن} \right)^{٨}$

الحل

$$\text{عدد الحدود} = ٨ + ١ = ٩$$

$$\text{الحد الأوسط} = \text{الحد الخامس}$$

$$ح_{٥} = {}^{٨}ق_{٤} (٢ن^{٢})^{٤} \left(-\frac{١}{ن} \right)^{٤}$$

$$= ١٦ن^{٨}$$

ل) أوجد قيمة $ن$ التي تجعل $٢ن + ١ ، ن + ١ ، ن + ٤$ حدوداً متتالية في متتابعة هندسية

الحل

$$\frac{ن + ١}{٢ن + ١} = \frac{ن + ٤}{ن + ١}$$

$$(ن + ١)^{٢} = (٢ن + ١)(ن + ٤)$$

$$ن^{٢} + ٢ن + ١ = ٢ن^{٢} + ٩ن + ٤$$

$$ن^{٢} + ٧ن + ٣ = ٠$$

$$ن = \frac{-٧ \pm \sqrt{٧^{٢} - ٤ \times ١ \times ٣}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{-٧ \pm \sqrt{٣٧}}{٢}$$

السؤال الخامس (٢٣) **أكمل ما يأتي** $(٨ - ١)(٨ + ٢ن)$ مفكوك في أسس متزايدة بدلالة ن

الحل

$$= ٨ + ٢ن - ٨ - ١٦ن = -٨ - ١٤ن$$

عدد حدود مفكوك $(ن + ٢)^{٨}$ في أسس متزايدة بدلالة ن = $٨ + ١ = ٩$ حدود

عدد حدود مفكوك $(٢ن - ١)^{٨}$ في أسس متزايدة بدلالة ن = $(٨ - ١)(١ + ٨) = ٧ + ٢$

اكتب : متتابعة حسابية حدودها موجبة ومجموع حدودها $= ن^{٢} + ٨ن$

الحل

$$\text{الحد الأول} = ١ + ٨ = ٩$$

$$\text{مجموع حدين} = ٢ + ٨ = ١٠$$

$$\text{أساس المتتابعة} = ١٠ - ٩ = ١$$

$$\text{الحد العام} = ٩ + (ن - ١) \times ١ = ن + ٨$$

ب) أوجد مفكوك $(٢ن + ١)^{٨}$ في أسس متزايدة بدلالة ن

الحل

$$= ١ + ٨ن + ٢٨ن^{٢} + ٥٦ن^{٣} + ٧٠ن^{٤} + \ldots$$

ب) أوجد الحد الذي يحتوي على $ن^{٣}$ في مفكوك $\left(ن^{٢} - \frac{١}{ن} \right)^{٩}$

الحل

$$ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} (ن^{٢})^{٩-ر} \left(-\frac{١}{ن} \right)^{ر}$$

$$= {}^{٩}ق_{ر} (-١)^{ر} ن^{١٨-٣ر}$$

$$١٨ - ٣ر = ٣$$

$$ر = ٥$$

$$\therefore \text{الحد المطلوب} = {}^{٩}ق_{٥} (-١)^{٥} ن^{٣} = -١٢٦ ن^{٣}$$

ج) أوجد قيمة $ن$ التي تجعل $٢ن + ٨ ، ن + ٣ ، ن + ٨$ حدوداً متتالية في متتابعة حسابية

الحل

$$ن + ٣ - (ن + ٨) = ن + ٨ - (ن + ٣)$$

$$-٥ = -٥$$

$$\therefore \text{المتتابعة حسابية}$$

$$\text{الحد الأول} = ن + ٨ = ٣ + ٨ = ١١$$

$$\text{أساس المتتابعة} = ن + ٣ - ن - ٨ = -٥$$

$$\text{مجموع } ٢٠ \text{ حداً} = \frac{٢٠}{٢} [٢ \times ١١ + (٢٠ - ١)(-٥)]$$

$$= ١٠ [٢٢ - ٩٥] = -٧٣٠$$

د) أوجد قيمة $ن$ التي تجعل $٩ + ٢٢ن + ١٥ن^{٢} + \ldots$ متقاربة

الحل

$$\text{المتتابعة متقاربة} \Leftrightarrow |\text{أساس}| < ١$$

$$|ن| < ١$$

$$-١ < ن < ١$$

$$\text{أساس المتتابعة} = \frac{٢٢ن}{٩} = \frac{١٥ن^{٢}}{٢٢ن} = \frac{٧ن}{١١}$$

$$\therefore -١ < \frac{٧ن}{١١} < ١$$

$$-\frac{١١}{٧} < ن < \frac{١١}{٧}$$

هـ) أوجد مفكوك $(٢ن - ١)^{٥}$ في أسس متزايدة بدلالة ن

الحل

$$= ١ - ١٠ن + ٤٠ن^{٢} - ٨٠ن^{٣} + ٨٠ن^{٤} - ٣٢ن^{٥}$$

و) أوجد الحد الأوسط في مفكوك $\left(٢ن^{٢} - \frac{١}{ن} \right)^{٨}$

الحل

$$\text{عدد الحدود} = ٨ + ١ = ٩$$

$$\text{الحد الأوسط} = \text{الحد الخامس}$$

$$ح_{٥} = {}^{٨}ق_{٤} (٢ن^{٢})^{٤} \left(-\frac{١}{ن} \right)^{٤}$$

$$= ١٦ن^{٨}$$

ز) أوجد قيمة $ن$ التي تجعل $٢ن + ١ ، ن + ١ ، ن + ٤$ حدوداً متتالية في متتابعة هندسية

الحل

$$\frac{ن + ١}{٢ن + ١} = \frac{ن + ٤}{ن + ١}$$

$$(ن + ١)^{٢} = (٢ن + ١)(ن + ٤)$$

$$ن^{٢} + ٢ن + ١ = ٢ن^{٢} + ٩ن + ٤$$

$$ن^{٢} + ٧ن + ٣ = ٠$$

$$ن = \frac{-٧ \pm \sqrt{٧^{٢} - ٤ \times ١ \times ٣}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{-٧ \pm \sqrt{٣٧}}{٢}$$

ح) أوجد قيمة $ن$ التي تجعل $٢ن + ٨ ، ن + ٣ ، ن + ٨$ حدوداً متتالية في متتابعة حسابية

الحل

$$ن + ٣ - (ن + ٨) = ن + ٨ - (ن + ٣)$$

$$-٥ = -٥$$

$$\therefore \text{المتتابعة حسابية}$$

$$\text{الحد الأول} = ن + ٨ = ٣ + ٨ = ١١$$

$$\text{أساس المتتابعة} = ن + ٣ - ن - ٨ = -٥$$

$$\text{مجموع } ٢٠ \text{ حداً} = \frac{٢٠}{٢} [٢ \times ١١ + (٢٠ - ١)(-٥)]$$

$$= ١٠ [٢٢ - ٩٥] = -٧٣٠$$

ط) أوجد قيمة $ن$ التي تجعل $٩ + ٢٢ن + ١٥ن^{٢} + \ldots$ متقاربة

الحل

$$\text{المتتابعة متقاربة} \Leftrightarrow |\text{أساس}| < ١$$

$$|ن| < ١$$

$$-١ < ن < ١$$

$$\text{أساس المتتابعة} = \frac{٢٢ن}{٩} = \frac{١٥ن^{٢}}{٢٢ن} = \frac{٧ن}{١١}$$

$$\therefore -١ < \frac{٧ن}{١١} < ١$$

$$-\frac{١١}{٧} < ن < \frac{١١}{٧}$$

ي) أوجد مفكوك $(٢ن - ١)^{٥}$ في أسس متزايدة بدلالة ن

الحل

$$= ١ - ١٠ن + ٤٠ن^{٢} - ٨٠ن^{٣} + ٨٠ن^{٤} - ٣٢ن^{٥}$$

ك) أوجد الحد الأوسط في مفكوك $\left(٢ن^{٢} - \frac{١}{ن} \right)^{٨}$

الحل

$$\text{عدد الحدود} = ٨ + ١ = ٩$$

$$\text{الحد الأوسط} = \text{الحد الخامس}$$

$$ح_{٥} = {}^{٨}ق_{٤} (٢ن^{٢})^{٤} \left(-\frac{١}{ن} \right)^{٤}$$

$$= ١٦ن^{٨}$$

ل) أوجد قيمة $ن$ التي تجعل $٢ن + ١ ، ن + ١ ، ن + ٤$ حدوداً متتالية في متتابعة هندسية

الحل

$$\frac{ن + ١}{٢ن + ١} = \frac{ن + ٤}{ن + ١}$$

$$(ن + ١)^{٢} = (٢ن + ١)(ن + ٤)$$

$$ن^{٢} + ٢ن + ١ = ٢ن^{٢} + ٩ن + ٤$$

$$ن^{٢} + ٧ن + ٣ = ٠$$

$$ن = \frac{-٧ \pm \sqrt{٧^{٢} - ٤ \times ١ \times ٣}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{-٧ \pm \sqrt{٣٧}}{٢}$$

٢٠٥ ماناا كيمنا

٢٠٥٠١ مومالما جماناا كيمنا جمالحمم دنومما جنتا

مكتمم دتم للا هتاا مهتما

٢٠٥٠٢ مومالما جماناا كيمنا جمالحمم دنومما جنتا

ومتم للا هتاا ويما

٢٠٦ ماناا ومتا

٢٠٧ مومالما جماناا ومتا

٢٠٨ لومتا جتمتما جماناا ومتا مر مومالما

٢٠٩ مومالما جماناا لومتاا جتم للا هتاا ويما ومتا دنومما

جنتا

٢١٠ لمحما

٢١١ ماناا لومتاا

٢١٢ مومالما جماناا لومتاا جتم للا هتاا مهتما ومتا دنومما

جنتا

٢١٣ مومالما جماناا لومتاا جتم للا هتاا ويما ومتا دنومما

فهمتما مكتاا

ماناا لومتاا

٢ـ ١ تمارين

١) إذا كانت المستقيمة ل توازي المستوى ك فإن أي مستوى يحوي ل يوازي المستوى ك أو يقطعه في مستقيم يوازي ل.

٢) إذا كانت المستقيمة ل توازي المستوى ك فإن أي مستوى يحوي ل ويقطع المستوى ك يقطعه في مستقيم يوازي ل.

٣) إذا كانت المستقيمة ل توازي المستوى ك فإن أي مستوى يحوي ل ويقطع المستوى ك يقطعه في مستقيم يوازي ل.

٤) إذا كانت المستقيمة ل توازي المستوى ك فإن أي مستوى يحوي ل ويقطع المستوى ك يقطعه في مستقيم يوازي ل.

٥) إذا كانت المستقيمة ل توازي المستوى ك فإن أي مستوى يحوي ل ويقطع المستوى ك يقطعه في مستقيم يوازي ل.

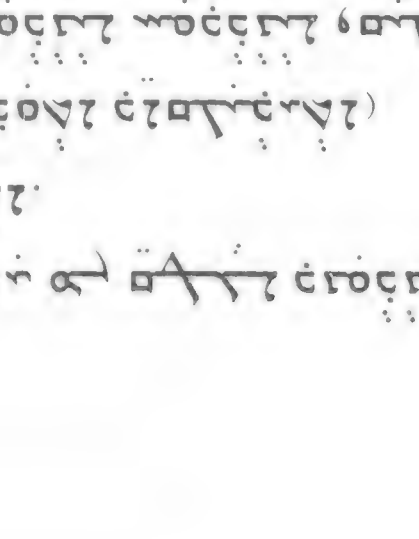
٦) إذا كانت المستقيمة ل توازي المستوى ك فإن أي مستوى يحوي ل ويقطع المستوى ك يقطعه في مستقيم يوازي ل.

٧) إذا كانت المستقيمة ل توازي المستوى ك فإن أي مستوى يحوي ل ويقطع المستوى ك يقطعه في مستقيم يوازي ل.

٨) إذا كانت المستقيمة ل توازي المستوى ك فإن أي مستوى يحوي ل ويقطع المستوى ك يقطعه في مستقيم يوازي ل.

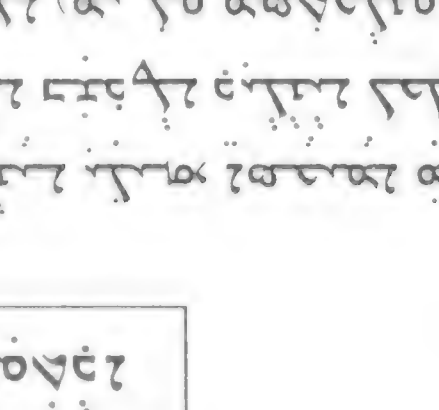
٩) إذا كانت المستقيمة ل توازي المستوى ك فإن أي مستوى يحوي ل ويقطع المستوى ك يقطعه في مستقيم يوازي ل.

١٠) إذا كانت المستقيمة ل توازي المستوى ك فإن أي مستوى يحوي ل ويقطع المستوى ك يقطعه في مستقيم يوازي ل.



(م) // ل ك

مبرهنة ٢



(ك) // (م)

ملاحظة

في هذا الدرس نكتفي حتى ولعضوية كل مستوى ضلع قطاع مخروطي لمحتواه . وفي هذا الدرس يعين قطاعا مخروطيا (دائرة ، قطع ناقص ، قطع مكافئ ، قطع زائد) بمستوى لا يمر برأس المخروط . ويكتفي بدراسة كل حالة على حدة .

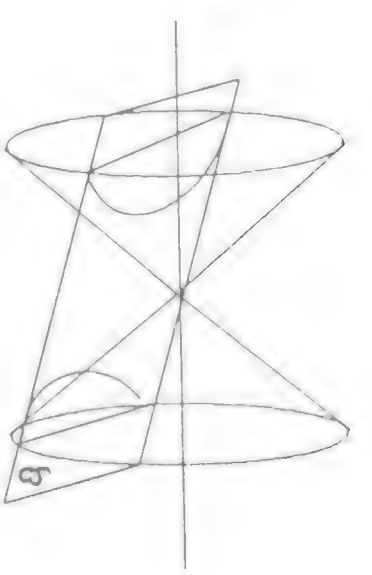
تحدد طبيعة القطاع المخروطي بحسب وضع المستوى القاطع بالنسبة لمحور المخروط .

تعريف (٢ . ١)

قطع ناقص (قطع إهليلجي)

(ب)

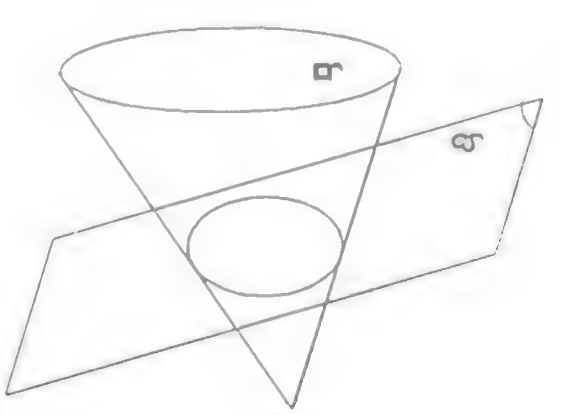
(ص) // يمثل قطع ناقص (قطع إهليلجي)



قطع مكافئ

(أ)

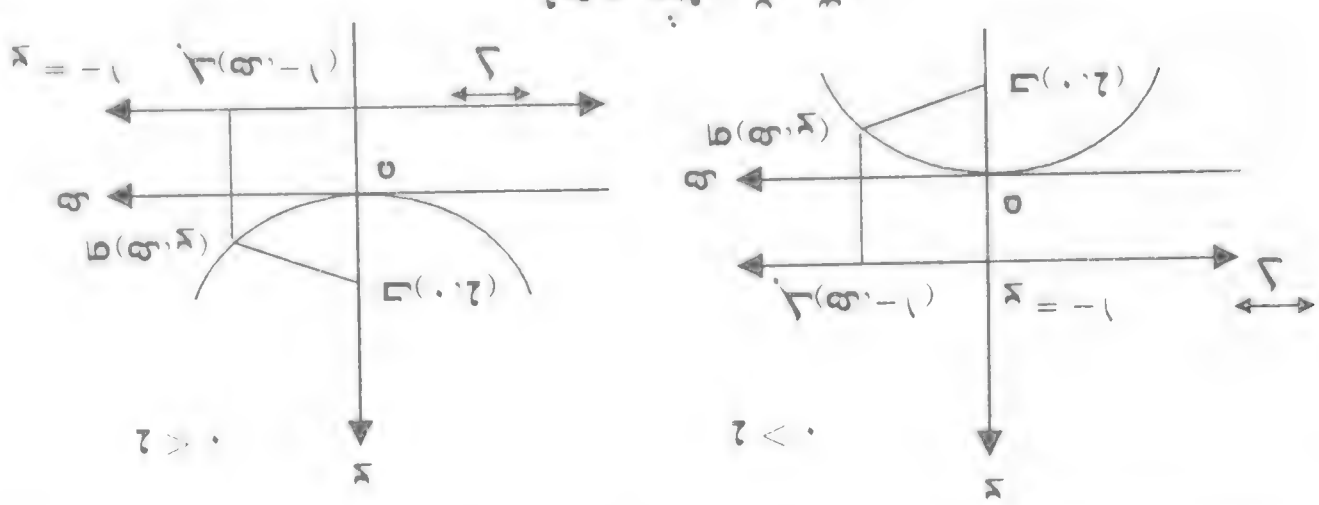
(ص) // (ص)



٢ . ٢ القطاع المخروطي

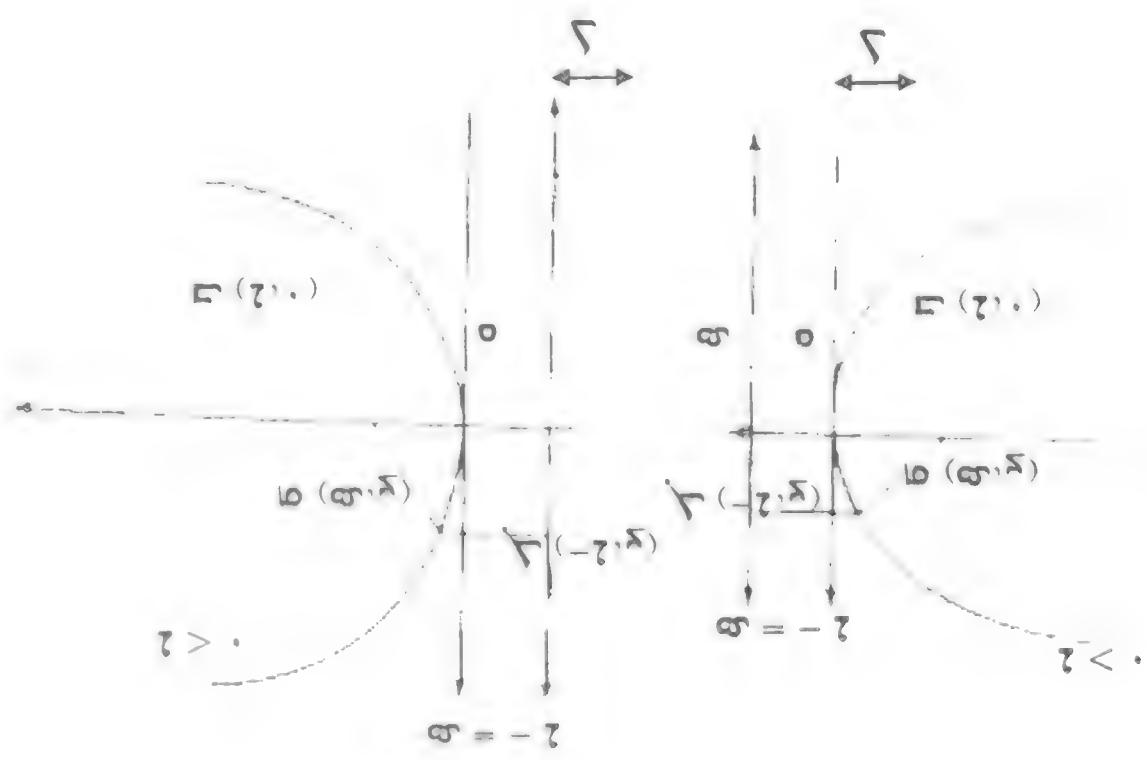
تعريف

القطاع المخروطي هو تقاطع مستوى مع سطح مخروطي دائري قائم (سطح) .



شكل (٣٠ ٢)

لو رسمنا دائرة لو مركزها على محور السينات وتمس كلا من المستقيمين س = ٣ ، س = -١ فإن مركز هذه الدائرة هو نقطة تقاطع المستقيم س = ١ مع محور السينات



شكل (٣٠ ٣)

لو تمس دائرة لو مركز

نترض ان الدائرة (ك ، ل) تمس محور السينات عند النقطة د (ك ، ٠) ---- (حيث ك مجهولة).

ولكن الدائرة تمس المستقيم ل (ك ، -١) . (معلوم لكونه يوازي ب ب). نرسم ان ب ك = ل .

ولكن (ك ، س) هي مركز الدائرة المطلوبة .

ونرسم من ب ك ⊥ ل ك ل ⇒

$\because$ د ب = ب ل (هي مجهولة) ⇒

$\sqrt{(ك - ل)^{٢} + س^{٢}} = |ك + ل|$ بتربيع الطرفين ⇒

$ك^{٢} - ٢ل ك + ل^{٢} + س^{٢} = ك^{٢} + ٢ل ك + ل^{٢}$ ⇔ $\boxed{س^{٢} = ٤ ل ك}$

مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$: هي مجموعة الأعداد على الصورة $z = x + iy$ حيث $x, y \in \mathbb{R}$ و $i^2 = -1$

x : الجزء الحقيقي لـ z ويرمز له بالرمز $\mathrm{Re}(z)$

y : الجزء التخيلي لـ z ويرمز له بالرمز $\mathrm{Im}(z)$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ لأن $x + 0i = x \in \mathbb{R}$

i : الوحدة التخيلية

iy : عدد تخيلي بحت

$0 = 0 + 0i$: العدد الصفري

$z = x + iy$ و $w = a + ib$ متساويان $\Leftrightarrow x = a$ و $y = b$

$z = x + iy$ مرافق z ويرمز له بالرمز $\bar{z}$ حيث $\bar{z} = x - iy$

$z + \bar{z} = 2x$ ، $z - \bar{z} = 2iy$ ، $z\bar{z} = x^2 + y^2$

$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ، $z = -\bar{z} \Leftrightarrow z$ تخيلي بحت

$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ ، $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$ ، $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ ، $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$: معيار z أو طويلة z

$|z| \geq 0$ ، $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ، $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

$|z|^2 = z\bar{z}$ ، $|zw| = |z||w|$ ، $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

$|z + w| \leq |z| + |w|$ ، $|z - w| \geq ||z| - |w||$

$|z - w|$: المسافة بين z و w

$|z - a| = r$: معادلة دائرة مركزها a ونصف قطرها r

$|z - a| < r$: معادلة القرص المفتوح مركزه a ونصف قطره r

$|z - a| \leq r$: معادلة القرص المغلق مركزه a ونصف قطره r

$r < |z - a| < R$: معادلة الحلقة المحصورة بين الدائرتين اللتين مركزهما a ونصفا قطريهما r و R

$\mathrm{Arg}(z) = \theta + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$: عمدة z حيث θ عمدة أساسية لـ z

$\theta \in]-\pi, \pi]$: العمدة الأساسية

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$: الشكل المثلثي لـ z

$z = |z|e^{i\theta}$: الشكل الأسي لـ z

$\mathrm{Arg}(zw) = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(w)$ ، $\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(w)$

$\mathrm{Arg}(z^n) = n\,\mathrm{Arg}(z)$ ، $\mathrm{Arg}(\bar{z}) = -\mathrm{Arg}(z)$

$\mathrm{Arg}(-z) = \mathrm{Arg}(z) + \pi$ ، $\mathrm{Arg}(iz) = \mathrm{Arg}(z) + \frac{\pi}{2}$

$\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$: معادلة نصف المستقيم المفتوح الذي مبدؤه O ويشمل $A(0,1)$

$\mathrm{Arg}(z) = 0$: معادلة نصف المستقيم المفتوح الذي مبدؤه O ويشمل $B(1,0)$

$\mathrm{Arg}(z) = \pi$: معادلة نصف المستقيم المفتوح الذي مبدؤه O ويشمل $C(-1,0)$

$\mathrm{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}$: معادلة نصف المستقيم المفتوح الذي مبدؤه O ويشمل $D(0,-1)$

معادلة المستقيم (AB) : $x + y - 1 = 0$

معادلة المستقيم (CD) : $x - y + 1 = 0$

معادلة المستقيم (BC) : $x + y + 1 = 0$

معادلة المستقيم (AD) : $x - y - 1 = 0$

معادلة المستقيم (OA) : $x = 0$

معادلة المستقيم (OB) : $y = 0$

معادلة المستقيم (OC) : $x = 0$

معادلة المستقيم (OD) : $y = 0$

معادلة المستقيم (AC) : $x = 0$

معادلة المستقيم (BD) : $y = 0

الوضع (٢) إذا كانت معادلة دليل لقطع مكافئ ما، فأوجد بؤرته

١) معادلة دليله $ص + ٥ = ٠$ ، وقمته نقطة الأصل

الحل

بؤرته.

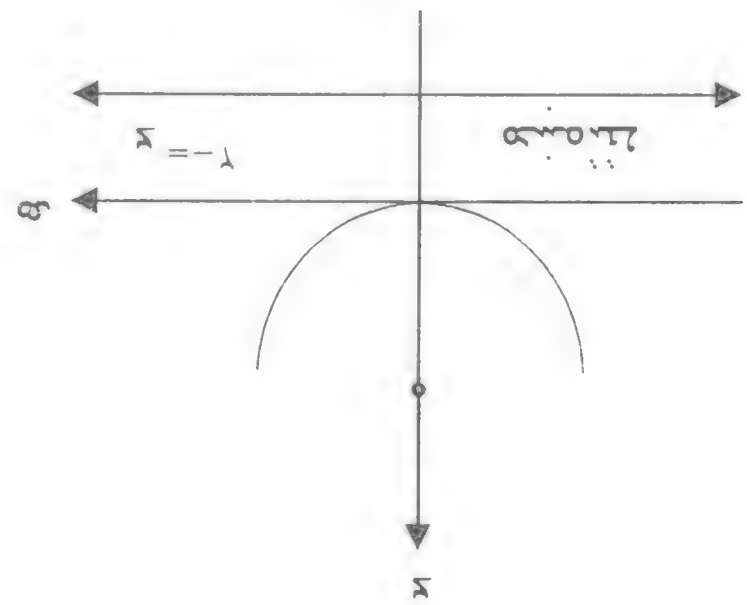
ب) إذا قمته نقطة الأصل ومعادلة دليله $س = ٢$، فأوجد معادلته

$ص = -٤س$

١) في معادلة دليله $٢س + ٥ = ٠ \Leftarrow س = \frac{-٥}{٢}$ ، وقمته نقطة الأصل

الحل

معادلة بؤرته.



$أ(ص ، س) \in م \Leftrightarrow ب(-ص ، س) \in م$

حيث م هي مجموعة جميع النقاط التي تحقق هذه الخاصية.

(هذه الخاصية تعني أن المحور الذي تقع عليه جميع نقاط القطع المكافئ هو محور تماثل)

ب) إذا كان $ص^{٢} - ٨س = ٠ \Leftrightarrow ص^{٢} = ٨$ معادلة دليله أي أن

المعادلة تأخذ الصورة العامة

$ص^{٢} = ٤ل س$

$ص^{٢} = ٨ س$

$٤ل = ٨ \Rightarrow ل = ٢$

نقطة $(٢ ، ٠)$ تقع على المعادلة $\Rightarrow$ معادلة دليله $س = -٢$

م $(ص) = س = \frac{١}{٨} ص^{٢}$ ومنها معادلة تأخذ الصورة العامة $ص^{٢} = ٤ل س$ حيث $ل = ٢$

حيث م هي مجموعة جميع النقاط. حيث كل نقطة تأخذ الشكل

$ص = -٤$

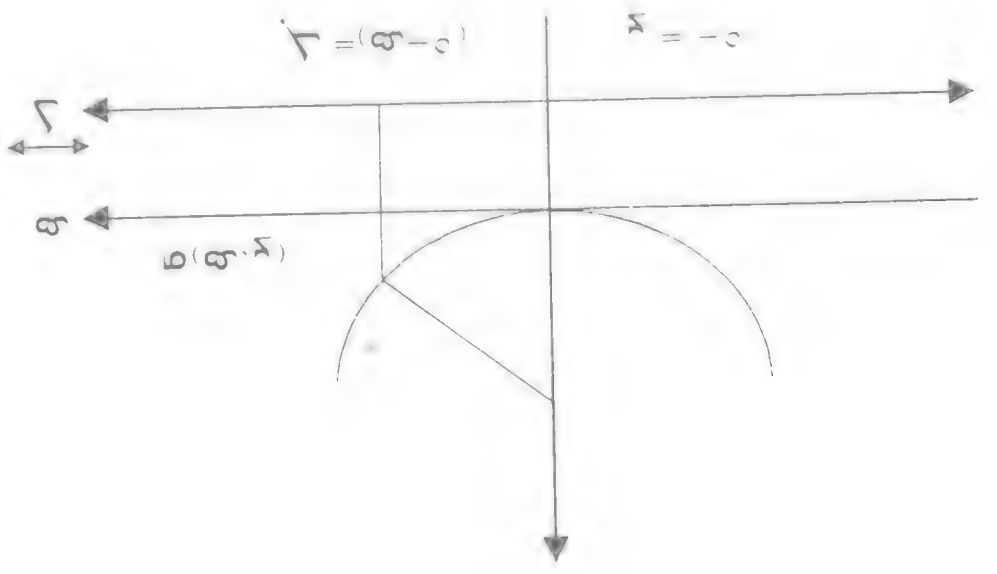
رؤوس القطع $\Rightarrow$ $A(\pm 5, 0)$

$\overleftrightarrow{BA} \perp \overleftrightarrow{AF}$

محاور تماثل $\overleftrightarrow{BA}$ هو المستقيم $y = 0$

محاور تماثل $\overleftrightarrow{AF}$ هو المستقيم $x = -5$

$\Rightarrow$ مركز الدائرة $(-5, 0)$



ب) هات بناء على (أ، ب) هذا على أن رؤوس القطع $\Rightarrow$ المطلوب

معادلة $x = -5$

حيث $P(x, y)$ هي نقطة على القطع المكافئ $\Rightarrow$

$\overleftrightarrow{PF} \perp \overleftrightarrow{AF}$

$\Rightarrow$ $P(x, -5)$

$\Rightarrow$ $x = -5$

ج) ΔPBF قائم الزاوية في P

$\Rightarrow$ $PF^2 = BF \times AF$

$\Rightarrow$ $x^2 = 16(x + 4)$ ، $x \geq 4$

$\Rightarrow$ $x^2 - 16x - 64 = 0$

$\Rightarrow$ $x = 8 \pm 4\sqrt{5}$

$\Rightarrow$ $x = 8 + 4\sqrt{5}$ ، $x \geq 4$

السؤال (٣) تحقق أن النقطة $(2, 4)$ تقع على القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$

ثم أوجد:

أ) بؤرة القطع.

ب) $D(0, 5)$ بعد أقرب نقطة على القطع.

ج) $D(-2\sqrt{7}, 0)$ بعد أقرب نقطة على القطع.

د) $D(-2, 0)$ بعد أقرب نقطة على القطع.

حل

$y^2 = 8x$

$\Rightarrow$ $4^2 = 8 \times 2$

$\Rightarrow$ $16 = 16$

$\Rightarrow$ $(2, 4)$ تقع على القطع المكافئ

أ) $4a = 8 \Rightarrow a = 2$

$\Rightarrow$ البؤرة $F(2, 0)$

ب) $D(0, 5)$ بعد أقرب نقطة على القطع

$\Rightarrow$ $D(\frac{25}{8}, 5)$ بعد أقرب نقطة على القطع المكافئ

$\Rightarrow$ $x = \frac{1}{8} y^2$

$y^2 = 8x \Rightarrow y^2 = 8 \times \frac{25}{8} = 25 \Leftrightarrow y = \pm 5$

حل المسألة (٤) نجد معادلة دليل القطع ل: ق = ٤ ، فيكون

أ) بؤرة القطع المكافئ هي النقطة ب (٢ ، ٠) ، ب' (٢ ، −٤)

ب) بؤرة القطع المكافئ هي النقطة ب (٣ ، ٩) ، (−٣ ، ٩).

جـ) بؤرة القطع المكافئ هي النقطة ب (٢ ، ٤) ، ب' (٢ ، −٤)

حل آخر أ) نجد أن معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومحوره ينطبق على محور السينات هي $ص^{٢} = ٤ق س$ ، $ق \neq ٠$

$\Leftarrow$ ب (٢ ، ٠) تحقق المعادلة $\Leftarrow$ $٠ = ٨ق \Leftarrow ٠ = ٤ - ٨ق \Leftarrow ٠ = ٤ - ٢^{٢}ق$

$\Leftarrow$ معادلة القطع المكافئ هي $ص^{٢} = ٨س$

ب) نجد أن ب' (−٢ ، $٢\sqrt{٢}$ ، ٠) تقع على القطع المكافئ $\Leftarrow$ معادلة الدليل ل: س = ٢

معادلة المحور هي ص = ٠ $\Leftarrow$ البؤرة ب (٢ ، ٠)

$ق = ٢ \Leftarrow ق = ٤ \Leftarrow ق^{٢} = ١٦ \Leftarrow ٨ق^{٢} = ١٢٨$

$\Leftarrow$ معادلة القطع المكافئ هي $ص^{٢} = ٨س$ ، $٨ق \leq ٠$

$ص_{١} = ٤ق \Leftarrow ص_{١} = ٨$

$\Leftarrow$ ب (٢ $\sqrt{٢}$ ، ٤) تقع على القطع المكافئ $\Leftarrow$ $٨ق = ١٦ \Leftarrow ق = ٢ \Leftarrow ص_{١} = ٨ق$ ، $٨ق \leq ٠$

$ص_{١} = ٤ق \Leftarrow ٤ق = ٨ \Leftarrow ق = ٢ \Leftarrow ص_{١} = ٨ق$ ، $٨ق \leq ٠$

حل المسألة (٤) نجد معادلة دليل القطع ل: ق = ٤ ، فيكون

أ) بؤرة القطع المكافئ هي النقطة ب (٢ ، ٤) ، ب' (٢ ، −٤)

ب) بؤرة القطع المكافئ هي النقطة ب (٣ ، ٩) ، (−٣ ، ٩).

جـ) بؤرة القطع المكافئ هي النقطة ب (٢ ، ٤) ، ب' (٢ ، −٤) ، فيكون

معادلة القطع المكافئ $\Leftarrow$ بؤرة كل فرع معادلة $\Leftarrow$ معادلة محور سينات

$ص_{١} = ٤ق س \Leftarrow ١٦ = ٨ق \Leftarrow ق = ٢ \Leftarrow ص_{١} = ٨س$ ، $٨ق \leq ٠$

$ص_{٢} = ٤ق س \Leftarrow ١٦ = ٨ق \Leftarrow ق = ٢ \Leftarrow ص_{٢} = ٨س$ ، $٨ق \leq ٠$

هـ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(-٢) ثم أوجد ق(٣) باستخدام نظرية التجزئة.

و) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(-١) ثم أوجد ق(١) باستخدام نظرية التجزئة.

ز) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٢) ثم أوجد ق(-٢) باستخدام نظرية التجزئة.

ح) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١) ثم أوجد ق(-١) باستخدام نظرية التجزئة.

ط) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٣) ثم أوجد ق(-٣) باستخدام نظرية التجزئة.

ى) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٤) ثم أوجد ق(-٤) باستخدام نظرية التجزئة.

ك) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٥) ثم أوجد ق(-٥) باستخدام نظرية التجزئة.

ل) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٦) ثم أوجد ق(-٦) باستخدام نظرية التجزئة.

م) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٧) ثم أوجد ق(-٧) باستخدام نظرية التجزئة.

ن) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٨) ثم أوجد ق(-٨) باستخدام نظرية التجزئة.

س) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٩) ثم أوجد ق(-٩) باستخدام نظرية التجزئة.

ع) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٠) ثم أوجد ق(-١٠) باستخدام نظرية التجزئة.

ف) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١١) ثم أوجد ق(-١١) باستخدام نظرية التجزئة.

ص) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٢) ثم أوجد ق(-١٢) باستخدام نظرية التجزئة.

ق) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٣) ثم أوجد ق(-١٣) باستخدام نظرية التجزئة.

ر) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٤) ثم أوجد ق(-١٤) باستخدام نظرية التجزئة.

ش) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٥) ثم أوجد ق(-١٥) باستخدام نظرية التجزئة.

ت) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٦) ثم أوجد ق(-١٦) باستخدام نظرية التجزئة.

ث) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٧) ثم أوجد ق(-١٧) باستخدام نظرية التجزئة.

خ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٨) ثم أوجد ق(-١٨) باستخدام نظرية التجزئة.

ذ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٩) ثم أوجد ق(-١٩) باستخدام نظرية التجزئة.

ض) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٢٠) ثم أوجد ق(-٢٠) باستخدام نظرية التجزئة.

ظ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٢١) ثم أوجد ق(-٢١) باستخدام نظرية التجزئة.

غ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٢٢) ثم أوجد ق(-٢٢) باستخدام نظرية التجزئة.

أ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٢٣) ثم أوجد ق(-٢٣) باستخدام نظرية التجزئة.

ب) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٢٤) ثم أوجد ق(-٢٤) باستخدام نظرية التجزئة.

ج) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٢٥) ثم أوجد ق(-٢٥) باستخدام نظرية التجزئة.

د) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٢٦) ثم أوجد ق(-٢٦) باستخدام نظرية التجزئة.

هـ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٢٧) ثم أوجد ق(-٢٧) باستخدام نظرية التجزئة.

و) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٢٨) ثم أوجد ق(-٢٨) باستخدام نظرية التجزئة.

ز) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٢٩) ثم أوجد ق(-٢٩) باستخدام نظرية التجزئة.

ح) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٣٠) ثم أوجد ق(-٣٠) باستخدام نظرية التجزئة.

ط) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٣١) ثم أوجد ق(-٣١) باستخدام نظرية التجزئة.

ى) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٣٢) ثم أوجد ق(-٣٢) باستخدام نظرية التجزئة.

ك) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٣٣) ثم أوجد ق(-٣٣) باستخدام نظرية التجزئة.

ل) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٣٤) ثم أوجد ق(-٣٤) باستخدام نظرية التجزئة.

م) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٣٥) ثم أوجد ق(-٣٥) باستخدام نظرية التجزئة.

ن) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٣٦) ثم أوجد ق(-٣٦) باستخدام نظرية التجزئة.

س) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٣٧) ثم أوجد ق(-٣٧) باستخدام نظرية التجزئة.

ع) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٣٨) ثم أوجد ق(-٣٨) باستخدام نظرية التجزئة.

ف) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٣٩) ثم أوجد ق(-٣٩) باستخدام نظرية التجزئة.

ص) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٤٠) ثم أوجد ق(-٤٠) باستخدام نظرية التجزئة.

ق) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٤١) ثم أوجد ق(-٤١) باستخدام نظرية التجزئة.

ر) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٤٢) ثم أوجد ق(-٤٢) باستخدام نظرية التجزئة.

ش) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٤٣) ثم أوجد ق(-٤٣) باستخدام نظرية التجزئة.

ت) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٤٤) ثم أوجد ق(-٤٤) باستخدام نظرية التجزئة.

ث) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٤٥) ثم أوجد ق(-٤٥) باستخدام نظرية التجزئة.

خ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٤٦) ثم أوجد ق(-٤٦) باستخدام نظرية التجزئة.

ذ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٤٧) ثم أوجد ق(-٤٧) باستخدام نظرية التجزئة.

ض) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٤٨) ثم أوجد ق(-٤٨) باستخدام نظرية التجزئة.

ظ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٤٩) ثم أوجد ق(-٤٩) باستخدام نظرية التجزئة.

غ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٥٠) ثم أوجد ق(-٥٠) باستخدام نظرية التجزئة.

أ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٥١) ثم أوجد ق(-٥١) باستخدام نظرية التجزئة.

ب) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٥٢) ثم أوجد ق(-٥٢) باستخدام نظرية التجزئة.

ج) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٥٣) ثم أوجد ق(-٥٣) باستخدام نظرية التجزئة.

د) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٥٤) ثم أوجد ق(-٥٤) باستخدام نظرية التجزئة.

هـ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٥٥) ثم أوجد ق(-٥٥) باستخدام نظرية التجزئة.

و) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٥٦) ثم أوجد ق(-٥٦) باستخدام نظرية التجزئة.

ز) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٥٧) ثم أوجد ق(-٥٧) باستخدام نظرية التجزئة.

ح) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٥٨) ثم أوجد ق(-٥٨) باستخدام نظرية التجزئة.

ط) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٥٩) ثم أوجد ق(-٥٩) باستخدام نظرية التجزئة.

ى) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٦٠) ثم أوجد ق(-٦٠) باستخدام نظرية التجزئة.

ك) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٦١) ثم أوجد ق(-٦١) باستخدام نظرية التجزئة.

ل) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٦٢) ثم أوجد ق(-٦٢) باستخدام نظرية التجزئة.

م) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٦٣) ثم أوجد ق(-٦٣) باستخدام نظرية التجزئة.

ن) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٦٤) ثم أوجد ق(-٦٤) باستخدام نظرية التجزئة.

س) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٦٥) ثم أوجد ق(-٦٥) باستخدام نظرية التجزئة.

ع) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٦٦) ثم أوجد ق(-٦٦) باستخدام نظرية التجزئة.

ف) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٦٧) ثم أوجد ق(-٦٧) باستخدام نظرية التجزئة.

ص) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٦٨) ثم أوجد ق(-٦٨) باستخدام نظرية التجزئة.

ق) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٦٩) ثم أوجد ق(-٦٩) باستخدام نظرية التجزئة.

ر) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٧٠) ثم أوجد ق(-٧٠) باستخدام نظرية التجزئة.

ش) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٧١) ثم أوجد ق(-٧١) باستخدام نظرية التجزئة.

ت) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٧٢) ثم أوجد ق(-٧٢) باستخدام نظرية التجزئة.

ث) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٧٣) ثم أوجد ق(-٧٣) باستخدام نظرية التجزئة.

خ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٧٤) ثم أوجد ق(-٧٤) باستخدام نظرية التجزئة.

ذ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٧٥) ثم أوجد ق(-٧٥) باستخدام نظرية التجزئة.

ض) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٧٦) ثم أوجد ق(-٧٦) باستخدام نظرية التجزئة.

ظ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٧٧) ثم أوجد ق(-٧٧) باستخدام نظرية التجزئة.

غ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٧٨) ثم أوجد ق(-٧٨) باستخدام نظرية التجزئة.

أ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٧٩) ثم أوجد ق(-٧٩) باستخدام نظرية التجزئة.

ب) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٨٠) ثم أوجد ق(-٨٠) باستخدام نظرية التجزئة.

ج) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٨١) ثم أوجد ق(-٨١) باستخدام نظرية التجزئة.

د) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٨٢) ثم أوجد ق(-٨٢) باستخدام نظرية التجزئة.

هـ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٨٣) ثم أوجد ق(-٨٣) باستخدام نظرية التجزئة.

و) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٨٤) ثم أوجد ق(-٨٤) باستخدام نظرية التجزئة.

ز) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٨٥) ثم أوجد ق(-٨٥) باستخدام نظرية التجزئة.

ح) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٨٦) ثم أوجد ق(-٨٦) باستخدام نظرية التجزئة.

ط) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٨٧) ثم أوجد ق(-٨٧) باستخدام نظرية التجزئة.

ى) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٨٨) ثم أوجد ق(-٨٨) باستخدام نظرية التجزئة.

ك) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٨٩) ثم أوجد ق(-٨٩) باستخدام نظرية التجزئة.

ل) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٩٠) ثم أوجد ق(-٩٠) باستخدام نظرية التجزئة.

م) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٩١) ثم أوجد ق(-٩١) باستخدام نظرية التجزئة.

ن) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٩٢) ثم أوجد ق(-٩٢) باستخدام نظرية التجزئة.

س) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٩٣) ثم أوجد ق(-٩٣) باستخدام نظرية التجزئة.

ع) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٩٤) ثم أوجد ق(-٩٤) باستخدام نظرية التجزئة.

ف) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٩٥) ثم أوجد ق(-٩٥) باستخدام نظرية التجزئة.

ص) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٩٦) ثم أوجد ق(-٩٦) باستخدام نظرية التجزئة.

ق) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٩٧) ثم أوجد ق(-٩٧) باستخدام نظرية التجزئة.

ر) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٩٨) ثم أوجد ق(-٩٨) باستخدام نظرية التجزئة.

ش) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(٩٩) ثم أوجد ق(-٩٩) باستخدام نظرية التجزئة.

ت) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٠٠) ثم أوجد ق(-١٠٠) باستخدام نظرية التجزئة.

ث) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٠١) ثم أوجد ق(-١٠١) باستخدام نظرية التجزئة.

خ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٠٢) ثم أوجد ق(-١٠٢) باستخدام نظرية التجزئة.

ذ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٠٣) ثم أوجد ق(-١٠٣) باستخدام نظرية التجزئة.

ض) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٠٤) ثم أوجد ق(-١٠٤) باستخدام نظرية التجزئة.

ظ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٠٥) ثم أوجد ق(-١٠٥) باستخدام نظرية التجزئة.

غ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٠٦) ثم أوجد ق(-١٠٦) باستخدام نظرية التجزئة.

أ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٠٧) ثم أوجد ق(-١٠٧) باستخدام نظرية التجزئة.

ب) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٠٨) ثم أوجد ق(-١٠٨) باستخدام نظرية التجزئة.

ج) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٠٩) ثم أوجد ق(-١٠٩) باستخدام نظرية التجزئة.

د) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١١٠) ثم أوجد ق(-١١٠) باستخدام نظرية التجزئة.

هـ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١١١) ثم أوجد ق(-١١١) باستخدام نظرية التجزئة.

و) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١١٢) ثم أوجد ق(-١١٢) باستخدام نظرية التجزئة.

ز) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١١٣) ثم أوجد ق(-١١٣) باستخدام نظرية التجزئة.

ح) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١١٤) ثم أوجد ق(-١١٤) باستخدام نظرية التجزئة.

ط) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١١٥) ثم أوجد ق(-١١٥) باستخدام نظرية التجزئة.

ى) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١١٦) ثم أوجد ق(-١١٦) باستخدام نظرية التجزئة.

ك) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١١٧) ثم أوجد ق(-١١٧) باستخدام نظرية التجزئة.

ل) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١١٨) ثم أوجد ق(-١١٨) باستخدام نظرية التجزئة.

م) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١١٩) ثم أوجد ق(-١١٩) باستخدام نظرية التجزئة.

ن) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٢٠) ثم أوجد ق(-١٢٠) باستخدام نظرية التجزئة.

س) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٢١) ثم أوجد ق(-١٢١) باستخدام نظرية التجزئة.

ع) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٢٢) ثم أوجد ق(-١٢٢) باستخدام نظرية التجزئة.

ف) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٢٣) ثم أوجد ق(-١٢٣) باستخدام نظرية التجزئة.

ص) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٢٤) ثم أوجد ق(-١٢٤) باستخدام نظرية التجزئة.

ق) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٢٥) ثم أوجد ق(-١٢٥) باستخدام نظرية التجزئة.

ر) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٢٦) ثم أوجد ق(-١٢٦) باستخدام نظرية التجزئة.

ش) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٢٧) ثم أوجد ق(-١٢٧) باستخدام نظرية التجزئة.

ت) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٢٨) ثم أوجد ق(-١٢٨) باستخدام نظرية التجزئة.

ث) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٢٩) ثم أوجد ق(-١٢٩) باستخدام نظرية التجزئة.

خ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٣٠) ثم أوجد ق(-١٣٠) باستخدام نظرية التجزئة.

ذ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٣١) ثم أوجد ق(-١٣١) باستخدام نظرية التجزئة.

ض) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٣٢) ثم أوجد ق(-١٣٢) باستخدام نظرية التجزئة.

ظ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٣٣) ثم أوجد ق(-١٣٣) باستخدام نظرية التجزئة.

غ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٣٤) ثم أوجد ق(-١٣٤) باستخدام نظرية التجزئة.

أ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٣٥) ثم أوجد ق(-١٣٥) باستخدام نظرية التجزئة.

ب) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٣٦) ثم أوجد ق(-١٣٦) باستخدام نظرية التجزئة.

ج) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٣٧) ثم أوجد ق(-١٣٧) باستخدام نظرية التجزئة.

د) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٣٨) ثم أوجد ق(-١٣٨) باستخدام نظرية التجزئة.

هـ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٣٩) ثم أوجد ق(-١٣٩) باستخدام نظرية التجزئة.

و) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٤٠) ثم أوجد ق(-١٤٠) باستخدام نظرية التجزئة.

ز) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٤١) ثم أوجد ق(-١٤١) باستخدام نظرية التجزئة.

ح) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٤٢) ثم أوجد ق(-١٤٢) باستخدام نظرية التجزئة.

ط) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٤٣) ثم أوجد ق(-١٤٣) باستخدام نظرية التجزئة.

ى) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٤٤) ثم أوجد ق(-١٤٤) باستخدام نظرية التجزئة.

ك) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٤٥) ثم أوجد ق(-١٤٥) باستخدام نظرية التجزئة.

ل) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٤٦) ثم أوجد ق(-١٤٦) باستخدام نظرية التجزئة.

م) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٤٧) ثم أوجد ق(-١٤٧) باستخدام نظرية التجزئة.

ن) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٤٨) ثم أوجد ق(-١٤٨) باستخدام نظرية التجزئة.

س) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٤٩) ثم أوجد ق(-١٤٩) باستخدام نظرية التجزئة.

ع) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٥٠) ثم أوجد ق(-١٥٠) باستخدام نظرية التجزئة.

ف) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٥١) ثم أوجد ق(-١٥١) باستخدام نظرية التجزئة.

ص) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٥٢) ثم أوجد ق(-١٥٢) باستخدام نظرية التجزئة.

ق) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٥٣) ثم أوجد ق(-١٥٣) باستخدام نظرية التجزئة.

ر) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٥٤) ثم أوجد ق(-١٥٤) باستخدام نظرية التجزئة.

ش) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٥٥) ثم أوجد ق(-١٥٥) باستخدام نظرية التجزئة.

ت) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٥٦) ثم أوجد ق(-١٥٦) باستخدام نظرية التجزئة.

ث) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٥٧) ثم أوجد ق(-١٥٧) باستخدام نظرية التجزئة.

خ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٥٨) ثم أوجد ق(-١٥٨) باستخدام نظرية التجزئة.

ذ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٥٩) ثم أوجد ق(-١٥٩) باستخدام نظرية التجزئة.

ض) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٦٠) ثم أوجد ق(-١٦٠) باستخدام نظرية التجزئة.

ظ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٦١) ثم أوجد ق(-١٦١) باستخدام نظرية التجزئة.

غ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٦٢) ثم أوجد ق(-١٦٢) باستخدام نظرية التجزئة.

أ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٦٣) ثم أوجد ق(-١٦٣) باستخدام نظرية التجزئة.

ب) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٦٤) ثم أوجد ق(-١٦٤) باستخدام نظرية التجزئة.

ج) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٦٥) ثم أوجد ق(-١٦٥) باستخدام نظرية التجزئة.

د) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٦٦) ثم أوجد ق(-١٦٦) باستخدام نظرية التجزئة.

هـ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٦٧) ثم أوجد ق(-١٦٧) باستخدام نظرية التجزئة.

و) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٦٨) ثم أوجد ق(-١٦٨) باستخدام نظرية التجزئة.

ز) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٦٩) ثم أوجد ق(-١٦٩) باستخدام نظرية التجزئة.

ح) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٧٠) ثم أوجد ق(-١٧٠) باستخدام نظرية التجزئة.

ط) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٧١) ثم أوجد ق(-١٧١) باستخدام نظرية التجزئة.

ى) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٧٢) ثم أوجد ق(-١٧٢) باستخدام نظرية التجزئة.

ك) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٧٣) ثم أوجد ق(-١٧٣) باستخدام نظرية التجزئة.

ل) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٧٤) ثم أوجد ق(-١٧٤) باستخدام نظرية التجزئة.

م) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٧٥) ثم أوجد ق(-١٧٥) باستخدام نظرية التجزئة.

ن) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٧٦) ثم أوجد ق(-١٧٦) باستخدام نظرية التجزئة.

س) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٧٧) ثم أوجد ق(-١٧٧) باستخدام نظرية التجزئة.

ع) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٧٨) ثم أوجد ق(-١٧٨) باستخدام نظرية التجزئة.

ف) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٧٩) ثم أوجد ق(-١٧٩) باستخدام نظرية التجزئة.

ص) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٨٠) ثم أوجد ق(-١٨٠) باستخدام نظرية التجزئة.

ق) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٨١) ثم أوجد ق(-١٨١) باستخدام نظرية التجزئة.

ر) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٨٢) ثم أوجد ق(-١٨٢) باستخدام نظرية التجزئة.

ش) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٨٣) ثم أوجد ق(-١٨٣) باستخدام نظرية التجزئة.

ت) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٨٤) ثم أوجد ق(-١٨٤) باستخدام نظرية التجزئة.

ث) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٨٥) ثم أوجد ق(-١٨٥) باستخدام نظرية التجزئة.

خ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٨٦) ثم أوجد ق(-١٨٦) باستخدام نظرية التجزئة.

ذ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٨٧) ثم أوجد ق(-١٨٧) باستخدام نظرية التجزئة.

ض) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٨٨) ثم أوجد ق(-١٨٨) باستخدام نظرية التجزئة.

ظ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٨٩) ثم أوجد ق(-١٨٩) باستخدام نظرية التجزئة.

غ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٩٠) ثم أوجد ق(-١٩٠) باستخدام نظرية التجزئة.

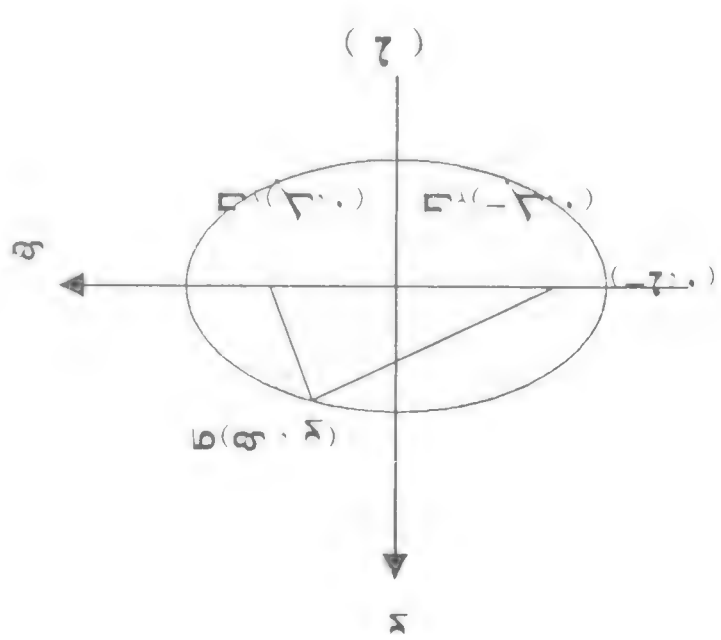
أ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٩١) ثم أوجد ق(-١٩١) باستخدام نظرية التجزئة.

ب) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٩٢) ثم أوجد ق(-١٩٢) باستخدام نظرية التجزئة.

ج) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٩٣) ثم أوجد ق(-١٩٣) باستخدام نظرية التجزئة.

د) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأوجد ق(١٩٤) ثم أوجد ق(-١٩٤) باستخدام نظرية التجزئة.

هـ) إذا كان ق(س) = س٣ + ٢س٢ + ٥س + ٦ فأ



إهداف (٢ ، ٨)

٢٠ ـ ٥ مبادئ الحيوية

مسألة

دعونا ص مجموعة إلى عدد حقيقي موجب ثابت ولتكن ع مجموعة غير خالية (حد) عناصر مجموعة ص ٢.

تعريف نقول عن مجموعة ع أنها مجموعة حيوية إذا تحقق الشرط التالي :

لكل ن ∈ ع ، ن > ٠ ، توجد مجموعة منتهية { م (ع ، ع) : (ع ، ع) ∈ ع × ع ، م د١ + م د٢ = ٢ ن }

في مجموعة مبادئ الحيوية نعرف عملية مغايرة على ع بـ د١ ، د٢ حتى نحصل على مجموعة حيوية د٣ ، د٤ في مجموعة مبادئ الحيوية.

نكتب د٣ = د١ ⊕ د٢ ، د٤ = د١ ⊗ د٢ ، ونسمي ⊕ ، ⊗ عمليتي الجمع والضرب في مجموعة مبادئ الحيوية.

معادلة القطع الناقص التي مركزها نقطة الأصل ومحاورها على المحورين الإحداثيين

٢ - ٥ - ١ معادلة القطع الناقص إذا كان مركزها نقطة الأصل ومحوراها على المحورين الإحداثيين

لكي نشتق معادلة القطع الناقص (٢ - ٨) (ق) ، نفرض أن $ب_١ (أ ، ٠) ، ب_٢ (-أ ، ٠)$.

وإذا كانت $ن (س ، ص)$ أي نقطة تقع على القطع الناقص.

$ن ب_١ + ن ب_٢ = ٢ أ$ حيث $أ > ٠$ ، $أ > جـ$ (لماذا؟)

$$\sqrt{(س - أ)^٢ + ص^٢} + \sqrt{(س + أ)^٢ + ص^٢} = ٢ أ \Rightarrow$$

$$\sqrt{(س - أ)^٢ + ص^٢} = ٢ أ - \sqrt{(س + أ)^٢ + ص^٢} \quad \text{(بنقل أحد الجذرين إلى الطرف الآخر)}$$

$$(س - أ)^٢ + ص^٢ = ٤ أ^٢ - ٤ أ \sqrt{(س + أ)^٢ + ص^٢} + (س + أ)^٢ + ص^٢ \quad \text{(بتربيع الطرفين)}$$

$$س^٢ - ٢ أ س + أ^٢ + ص^٢ = ٤ أ^٢ - ٤ أ \sqrt{(س + أ)^٢ + ص^٢} + س^٢ + ٢ أ س + أ^٢ + ص^٢$$

$$\Rightarrow ٤ أ \sqrt{(س + أ)^٢ + ص^٢} = ٤ أ^٢ + ٤ أ س \quad \text{(بقسمة الطرفين على } ٤ أ \text{)}$$

$$\Rightarrow أ \sqrt{(س + أ)^٢ + ص^٢} = أ^٢ + أ س \quad \text{(بتربيع الطرفين)}$$

$$\Rightarrow أ^٢ (س^٢ + ٢ أ س + أ^٢ + ص^٢) = أ^٤ + ٢ أ^٣ س + أ^٢ س^٢$$

$$أ^٢ س^٢ + ٢ أ^٣ س + أ^٢ أ^٢ + أ^٢ ص^٢ = أ^٤ + ٢ أ^٣ س + أ^٢ س^٢$$

$$أ^٢ س^٢ - أ^٢ س^٢ + أ^٢ ص^٢ = أ^٤ - أ^٢ أ^٢$$

$$أ^٢ ص^٢ - أ^٢ ص^٢ + أ^٢ ص^٢ = أ^٢ (أ^٢ - أ^٢)$$

$$\text{بقسمة طرفي المعادلة على } أ^٢ ص^٢ \text{ ينتج أن}$$

٢ - ٥ - ١ معادلة القطع الناقص التي مركزها نقطة الأصل ومحوراها هما المحورين الإحداثيين

معادلة القطع الناقص التي مركزها نقطة الأصل ومحورها الأكبر ينطبق على المحور السيني

$$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$$

معادلة القطع الناقص التي مركزها نقطة الأصل ومحورها الأكبر ينطبق على المحور الصادي

$$\frac{ص^٢}{أ^٢} + \frac{س^٢}{ب^٢} = ١$$

$$٤٠٠ = ١٦ س^{٢} + ٢٥ ص^{٢} \quad (١)$$

$$\text{مثال} \quad ١ = \frac{٦ ص^{٢}}{٤٠٠} + \frac{٢٥ ص^{٢}}{٤٠٠} \Leftrightarrow ٤٠٠ = ١٦ س^{٢} + ٢٥ ص^{٢}$$

$$\text{الصورة القياسية للقطع الناقص} \quad \frac{ص^{٢}}{١٦} + \frac{س^{٢}}{٢٥} = \text{الصورة غير القياسية للقطع الناقص}$$

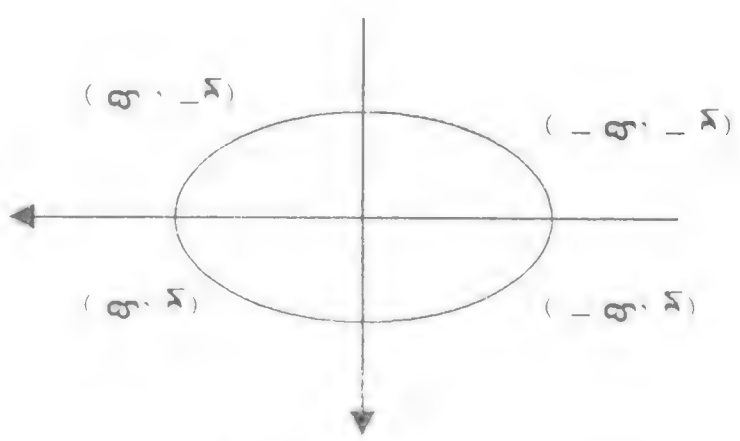
$$\text{البؤرتان} \quad \frac{ص^{٢}}{ك^{٢}} + \frac{س^{٢}}{ل^{٢}} = ١ \Longrightarrow ك^{٢} = ١٦ \Longleftarrow ك = ٤ \Longrightarrow ٢ ك = ٨ \text{ المسافة بين البؤرتين}$$

$$ل^{٢} = ٢٥ \Longrightarrow ل = ٥ \Longleftarrow ٢ ل = ١٠ \text{ المسافة بين القطبين}$$

$$\text{القطبان} \quad (٠ ، ٥) ، (٠ ، -٥) \Longrightarrow ق_{١} (٠ ، ل) ، ق_{٢} (٠ ، -ل)$$

$$\therefore \text{البؤرتان} \quad ب_{١} (٠ ، ٣) ، ب_{٢} (٠ ، -٣) \text{ وطول المحور الأصغر} = ٤ \text{ وحدات}$$

$$\text{طول المحور الأكبر} = ٢ ل = ١٠ \text{ وحدات}$$



$$\text{لاحظ أن:} \quad \text{إذا كان } (س ، ص) \in \text{ق} \Longleftrightarrow \text{فإن } (-س ، ص) \in \text{ق} ، (س ، -ص) \in \text{ق} ، (-س ، -ص) \in \text{ق}$$

$$\forall (س ، ص) \in \text{ق} ، \exists (-س ، ص) \in \text{ق} \Longleftrightarrow \text{إذا كان } \ldots \text{ فإن المحور الصادي يمثل محور تماثل}$$

$$\forall (س ، ص) \in \text{ق} ، \exists (س ، -ص) \in \text{ق} \Longleftrightarrow \text{إذا كان } \ldots \text{ فإن المحور السيني يمثل محور تماثل}$$

$$\forall (س ، ص) \in \text{ق} ، \exists (-س ، -ص) \in \text{ق} \Longleftrightarrow \text{إذا كان } \ldots \text{ فإن نقطة الأصل تمثل مركز تماثل}$$

لكي نجد المعادلة القياسية للقطع الناقص نحتاج إلى معرفة نقطة واحدة على القطع الناقص غير نقطة التقاطع مع المحاور.

معادلة القطع الناقص هي $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$ ومنها $ب^٢ = ٩$ ، $أ^٢ = ٢٥$

$\Rightarrow ج^٢ = أ^٢ - ب^٢ = ٢٥ - ٩ = ١٦$ ومنها $ج = ٤$

$\therefore$ البؤرتان هما $ب_١(-٤ ، ٠)$ ، $ب_٢(٤ ، ٠)$

$\therefore$ الرأسان هما $ر_١(-٥ ، ٠)$ ، $ر_٢(٥ ، ٠)$

$\therefore$ المعادلة المرافقة هي $\frac{س^٢}{٢٥} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$

$\Rightarrow ل_١ = \frac{٣}{٥}$ ومنها معادلة المستقيم المار بالنقطة الأصل هي $ص = \frac{٣}{٥} س$

$\Rightarrow ل_٢ = -\frac{٣}{٥}$ ومنها معادلة المستقيم المار بالنقطة الأصل هي $ص = -\frac{٣}{٥} س$

$\therefore$ المعادلة المرافقة هي $\frac{س^٢}{٢٥} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$

$\Rightarrow ل_١ = \frac{٣}{٥}$ ومنها معادلة المستقيم المار بالنقطة الأصل هي $ص = \frac{٣}{٥} س$

$\Rightarrow ل_٢ = -\frac{٣}{٥}$ ومنها معادلة المستقيم المار بالنقطة الأصل هي $ص = -\frac{٣}{٥} س$

$\therefore$ البؤرتان هما $ب_١(-\sqrt{٣٤} ، ٠)$ ، $ب_٢(\sqrt{٣٤} ، ٠)$

$\therefore$ الرأسان هما $ر_١(-٣ ، ٠)$ ، $ر_٢(٣ ، ٠)$

$\therefore$ المعادلة المرافقة هي $\frac{س^٢}{٩} - \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$

$\Rightarrow ل_١ = \frac{٥}{٣}$ ومنها معادلة المستقيم المار بالنقطة الأصل هي $ص = \frac{٥}{٣} س$

$\Rightarrow ل_٢ = -\frac{٥}{٣}$ ومنها معادلة المستقيم المار بالنقطة الأصل هي $ص = -\frac{٥}{٣} س$

$\therefore$ البؤرتان هما $ب_١(٠ ، -\sqrt{٣٤}) ، ب_٢(٠ ، \sqrt{٣٤})$

$\therefore$ الرأسان هما $ر_١(٠ ، -٣) ، ر_٢(٠ ، ٣)$

$\therefore$ المعادلة المرافقة هي $\frac{س^٢}{٢٥} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$

$\Rightarrow ل_١ = \frac{٣}{٥}$ ومنها معادلة المستقيم المار بالنقطة الأصل هي $ص = \frac{٣}{٥} س$

$\Rightarrow ل_٢ = -\frac{٣}{٥}$ ومنها معادلة المستقيم المار بالنقطة الأصل هي $ص = -\frac{٣}{٥} س$

$\therefore$ البؤرتان هما $ب_١(٠ ، -٥) ، ب_٢(٠ ، ٥)$

$\therefore$ الرأسان هما $ر_١(٠ ، -٤) ، ر_٢(٠ ، ٤)$

$\therefore$ المعادلة المرافقة هي $\frac{س^٢}{٩} - \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$

$\Rightarrow ل_١ = \frac{٥}{٣}$ ومنها معادلة المستقيم المار بالنقطة الأصل هي $ص = \frac{٥}{٣} س$

$\Rightarrow ل_٢ = -\frac{٥}{٣}$ ومنها معادلة المستقيم المار بالنقطة الأصل هي $ص = -\frac{٥}{٣} س$

$\therefore$ البؤرتان هما $ب_١(-٣ ، ٠) ، ب_٢(٣ ، ٠)$

$\therefore$ الرأسان هما $ر_١(-٢ ، ٠) ، ر_٢(٢ ، ٠)$

$\therefore$ المعادلة المرافقة هي $\frac{س^٢}{٤} - \frac{ص^٢}{٥} = ١$

$\Rightarrow ل_١ = \frac{\sqrt{٥}}{٢}$ ومنها معادلة المستقيم المار بالنقطة الأصل هي $ص = \frac{\sqrt{٥}}{٢} س$

$\Rightarrow ل_٢ = -\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ ومنها معادلة المستقيم المار بالنقطة الأصل هي $ص = -\frac{\sqrt{٥}}{٢} س$

$\therefore$ البؤرتان هما $ب_١(-\sqrt{٩} ، ٠) ، ب_٢(\sqrt{٩} ، ٠)$

$\therefore$ الرأسان هما $ر_١(-\sqrt{٤} ، ٠) ، ر_٢(\sqrt{٤} ، ٠)$

$\therefore$ المعادلة المرافقة هي $\frac{س^٢}{٤} - \frac{ص^٢}{٥} = ١$

$\Rightarrow ل_١ = \frac{\sqrt{٥}}{٢}$ ومنها معادلة المستقيم المار بالنقطة الأصل هي $ص = \frac{\sqrt{٥}}{٢} س$

$\Rightarrow ل_٢ = -\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ ومنها معادلة المستقيم المار بالنقطة الأصل هي $ص = -\frac{\sqrt{٥}}{٢} س$

$\therefore$ البؤرتان هما $ب_١(٠ ، -\sqrt{٩}) ، ب_٢(٠ ، \sqrt{٩})$

$\therefore$ الرأسان هما $ر_١(٠ ، -\sqrt{٤}) ، ر_٢(٠ ، \sqrt{٤})$

$\therefore$ المعادلة المرافقة هي $\frac{س^٢}{٥} - \frac{ص^٢}{٤} = ١$

$\Rightarrow ل_١ = \frac{٢}{\sqrt{٥}}$ ومنها معادلة المستقيم المار بالنقطة الأصل هي $ص = \frac{٢}{\sqrt{٥}} س$

$\Rightarrow ل_٢ = -\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ ومنها معادلة المستقيم المار بالنقطة الأصل هي $ص = -\frac{٢}{\sqrt{٥}} س$

$\therefore$ البؤرتان هما $ب_١(-٣ ، ٠) ، ب_٢(٣ ، ٠)$

$\therefore$ الرأسان هما $ر_١(-\sqrt{٥} ، ٠) ، ر_٢(\sqrt{٥} ، ٠)$

$\therefore$ المعادلة المرافقة هي $\frac{س^٢}{٥} - \frac{ص^٢}{٤} = ١$

$\Rightarrow ل_١ = \frac{٢}{\sqrt{٥}}$ ومنها معادلة المستقيم المار بالنقطة الأصل هي $ص = \frac{٢}{\sqrt{٥}} س$

$\Rightarrow ل_٢ = -\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ ومنها معادلة المستقيم المار بالنقطة الأصل هي $ص = -\frac{٢}{\sqrt{٥}} س$

$\therefore$ البؤرتان هما $ب_١(٠ ، -٣) ، ب_٢(٠ ، ٣)$

$\therefore$ الرأسان هما $ر_١(٠ ، -\sqrt{٥}) ، ر_٢(٠ ، \sqrt{٥})

$$\frac{x^2}{\frac{36}{5}} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{5}} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad ، \quad = \quad \Rightarrow \quad = \quad \Rightarrow \quad = \quad \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow

السؤال (٧) إذا مر مماس للقطع ناقص معادلته $\frac{س^{٢}}{٩} + \frac{ص^{٢}}{٤} = ١$ بالنقطة $(٣ ، ٢\sqrt{٢})$ فأوجد معادلة هذا المماس.

الحل

معادلة المماس هي $\frac{س_{١} س}{٩} + \frac{ص_{١} ص}{٤} = ١$

$\frac{٣س}{٩} + \frac{٢\sqrt{٢}\, ص}{٤} = ١$

$\frac{س}{٣} + \frac{\sqrt{٢}\, ص}{٢} = ١$

$٢س + ٣\sqrt{٢}\, ص = ٦$

السؤال (٨) إذا مر مماس للقطع ناقص معادلته $\frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{١٦} = ١$ بالنقطة $(٣ ، ٤)$ فأوجد معادلة هذا المماس.

الحل

معادلة المماس هي $\frac{س_{١} س}{٢٥} + \frac{ص_{١} ص}{١٦} = ١$

$\frac{٣س}{٢٥} + \frac{٤ص}{١٦} = ١$

السؤال (٩) إذا مر مماس للقطع ناقص معادلته $٩س^{٢} + ٢٥ص^{٢} = ٢٢٥$ بالنقطة $(٥ ، ٣)$ فأوجد معادلة هذا المماس.

الحل

$\frac{٩س^{٢}}{٢٢٥} + \frac{٢٥ص^{٢}}{٢٢٥} = ١ \Leftrightarrow \frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$

معادلة المماس هي $\frac{س_{١} س}{٢٥} + \frac{ص_{١} ص}{٩} = ١$

$\frac{٣س}{٢٥} + \frac{٥ص}{٩} = ١$

السؤال (١٠) إذا مر مماس للقطع ناقص معادلته $٩س^{٢} + ٢٥ص^{٢} = ٢٢٥$ بالنقطة $(٥ ، ٣)$ فأوجد معادلة هذا المماس.

الحل

$\frac{٩س^{٢}}{٢٢٥} + \frac{٢٥ص^{٢}}{٢٢٥} = ١ \Leftrightarrow \frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$

معادلة المماس هي $\frac{س_{١} س}{٢٥} + \frac{ص_{١} ص}{٩} = ١$

$\frac{٣س}{٢٥} + \frac{٥ص}{٩} = ١$

السؤال (١١) إذا مر مماس للقطع ناقص معادلته $٩س^{٢} + ٢٥ص^{٢} = ٢٢٥$ بالنقطة $(٥ ، ٣)$ فأوجد معادلة هذا المماس.

الحل

$\frac{٩س^{٢}}{٢٢٥} + \frac{٢٥ص^{٢}}{٢٢٥} = ١ \Leftrightarrow \frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$

معادلة المماس هي $\frac{س_{١} س}{٢٥} + \frac{ص_{١} ص}{٩} = ١$

$\frac{٣س}{٢٥} + \frac{٥ص}{٩} = ١$

السؤال (١٢) إذا مر مماس للقطع ناقص معادلته $٩س^{٢} + ٢٥ص^{٢} = ٢٢٥$ بالنقطة $(٥ ، ٣)$ فأوجد معادلة هذا المماس.

الحل

$\frac{٩س^{٢}}{٢٢٥} + \frac{٢٥ص^{٢}}{٢٢٥} = ١ \Leftrightarrow \frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$

معادلة المماس هي $\frac{س_{١} س}{٢٥} + \frac{ص_{١} ص}{٩} = ١$

$\frac{٣س}{٢٥} + \frac{٥ص}{٩} = ١$

حل: نفرض مجموعة النقط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و (x_3, y_3) على الترتيب :

$$\frac{y_1}{x_1^2} + \frac{y_2}{x_2^2} = 1 \Rightarrow \frac{4y_1}{x_1^2} + \frac{y_2}{x_2^2} = 1 \Rightarrow \frac{36}{x_1^2} + \frac{9}{x_2^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{4x_2^2} = \frac{1}{36}$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{4x_2^2} = \frac{1}{36} \quad \text{(1)}$$

$$\frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{4x_3^2} = \frac{1}{36} \quad \text{(2)}$$

$$\frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{4x_1^2} = \frac{1}{36} \quad \text{(3)}$$

بجمع (1) و (2) و (3) نجد أن :

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = \frac{1}{12}$$

س١ : حل كل معادلة فيما يأتى إذا كان مجال كل منها ح

(١) ٤ هـ$_{١}^{٢}$ + ٩ س$_{١}^{٢}$ = ٣٦

(٢) ٩ هـ$_{١}^{٢}$ + ٤ س$_{١}^{٢}$ = ١

(٣) ٢ هـ$_{١}^{٢}$ + ٣ س$_{١}^{٢}$ = ٦

(٤) ٥ هـ$_{١}^{٢}$ + ٥ س$_{١}^{٢}$ = ٧٥

س٢ : حقق أن المعادلة الآتية تمثل دائرة ثم أوجد مركزها وطول نصف قطرها

ل) د١ (٣ ، ٠) ، د٢ (−٣ ، ٠) وتمس (٥ ،) ، (−٥ ، ٠)

ب) ق ∈ د١ ، ق ∈ د٢ ، ق هـ = ١٢ وحدة طول

جـ) ق ∈ د١ ، ق ∈ د٢ ، ق هـ = ٤ وحدات طول

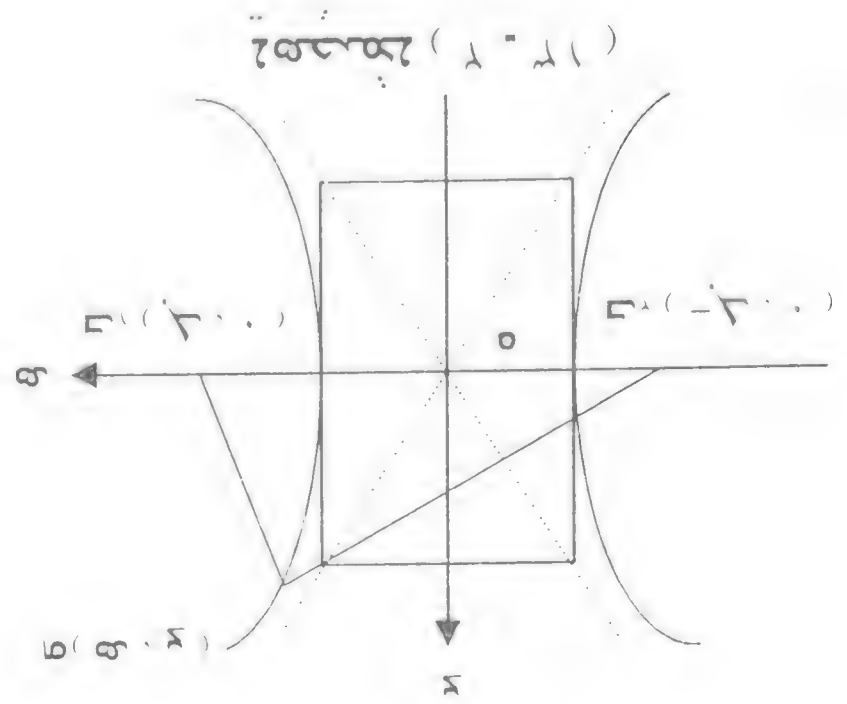
س٣ : أوجد معادلة دائرة تمر بالنقطة (٤ ، ٣) وتقطع من كل من المحورين وترا طوله ٨ وحدات طول

س٤ : أوجد معادلة دائرة تمر بنقطة الأصل وتقطع من المحور السينى وترا طوله ٦ وحدات طول

وتمس المحور الصادى عند النقطة (٠ ، ٤)

س٥ : أوجد معادلة دائرة مركزها على المستقيم ص = ٢ س وتمس كلا من المحورين الإحداثيين

س٦ : أوجد معادلة دائرة مركزها (٣ ، ٤) وتمس المستقيم ٣ س + ٤ ص = ٠



هندسة

لو وُجد تحويلٌ هـ لمدى دوسه هندسة (دد) نحو صدى هندسة فإن وُجد له داخلة هـ دوسه له نحو دوسه هندسة

٢٠٦ مبرهنة

لكل دوسه ثابتة هـ ≠ ٠ فإن

١) التحويل التطابقي د١ : د٢ (-٤ ، ٠) ، د٢ (٤ ، ٠)

٢) التحويل التطابقي دتحو د١(٤ ، ٠) ، د٢ (-٤ ، ٠)

دورانية ل (هـ ، ٤) هندسة لمبدأ تحويل نحو إحداثيات

تحاكي د١ د٢ ل = ٤ ، ٢ مبرهنة.

٣) التحويل الطبيعي تحويل تطابقي فإن لكل هندسة ف صورتها ف' تحقق ف ∥ ف'

وضع لل هندسة تحويل طبيعي هـ هندسة هندسة ثابت

مجموع ٢٠ مبرهنة وهي هندسة ثابت مجموع ٢١ مبرهنة.

د) هـ إذا كانت مبرهنة فرعية تحويل تطابقي.

مبرهنة

هندسة

مبرهنة = ٢ د π نق ٢ فإن تحويل هندسة تحويل تطابقي.

نق.

$$\pi = \frac{٢}{٢٢}$$

٢٠٦ تحويل هندسة

لكل نقطة في المستوى يوجد مماس واحد على الأكثر يمر بها

في حالة نقطة م ∈ ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ يوجد مماسان هما ل₁ : س = ٠ ، ل₂ : ٣س − ٤ص + ١٢ = ٠

في حالة نقطة م ∈ ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ يوجد مماسان هما ل₃ : س = ٠ ، ل₄ : ٣س + ٤ص + ١٢ = ٠

في حالة نقطة م ∈ ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ يوجد مماسان هما ل₅ : س = ٥ ، ل₆ : ٣س − ٤ص − ٢٥ = ٠

في حالة نقطة م ∈ ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ يوجد مماسان هما ل₇ : س = −٥ ، ل₈ : ٣س + ٤ص − ٢٥ = ٠

٢ـ٧ مماسات دائرة يوجد

ولكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٣ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٤ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٥ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٦ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٧ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٨ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٩ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

١٠ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

١١ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

١٢ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

١٣ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

١٤ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

١٥ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

١٦ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

١٧ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

١٨ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

١٩ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٢٠ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٢١ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٢٢ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٢٣ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٢٤ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٢٥ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٢٦ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٢٧ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٢٨ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٢٩ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٣٠ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٣١ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٣٢ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٣٣ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٣٤ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٣٥ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٣٦ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٣٧ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٣٨ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ لها مماس وحيد هو ل₃ : س = ٥

ولكون هندسة الدائرة ق₄ حيث ق₄ : (س + ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₄ (−٥ ، ٠) ∈ ق₄ لها مماس وحيد هو ل₄ : س = −٥

٣٩ـ٧ مماسات دائرة يوجد

لكون هندسة الدائرة ق₁ حيث ق₁ : (س − ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₁ (٢ ، ٠) ∈ ق₁ لها مماس وحيد هو ل₁ : س = ٢

ولكون هندسة الدائرة ق₂ حيث ق₂ : (س + ٤)² + ص² = ٤ نقطة مماس م₂ (−٢ ، ٠) ∈ ق₂ لها مماس وحيد هو ل₂ : س = −٢

ولكون هندسة الدائرة ق₃ حيث ق₃ : (س − ٤)² + ص² = ٩ نقطة مماس م₃ (٥ ، ٠) ∈ ق₃ ل

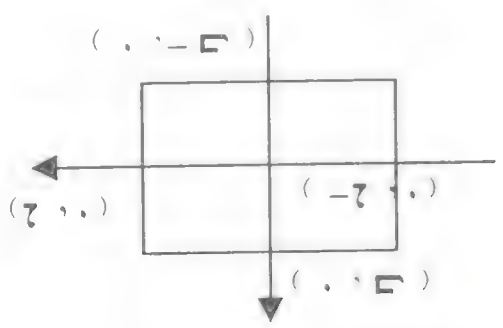
قطع ناقص ومعادلته

١) قطعة مستقيمة طولها (٤ ، ٠) ، (−٤ ، ٠)

ج قطعة متوسطة (٠ ، ب) ، (٠ ، −ب)

وطولها يساوي ٤ ، ب = ٣

قطع ناقص (٢ ، ٠ ، ٤)



٢) قطعة طولها ٨

معادلة (٢ ، ٠ ، ٥)

معادلة (٢ ، ٠ ، ٥)

معادلة (٢ ، ٠ ، ٤)

٤٦

السؤال (١) إذا تحرك متحرك في مستوى بحيث يحدث دائما حتى لا تتغير مقدارا ومقدارا ثابتين فإن المتحرك يتحرك في مستوى يسمى قطع زائد ومعادلته في أبسط صورة هي : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

أ) $2a = 10 \Rightarrow a = 5$ ، $2b = 8 \Rightarrow b = 4$

$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ ، $\frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{16} + 1$

ب) $2a = 6 \Rightarrow a = 3$ ، $2b = 10 \Rightarrow b = 5$

$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$ ، $\frac{y^2}{9} = \frac{x^2}{25} + 1$

ج) $2a = 16 \Rightarrow a = 8$ ، $2b = 12 \Rightarrow b = 6$

$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ ، $\frac{x^2}{64} = \frac{y^2}{36} + 1$

السؤال (٢) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(4, 3\sqrt{2})$ ومعادلتا مقارباه $y = \pm x$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$

$\frac{16}{a^2} - \frac{18}{a^2} = 1$ ، $\frac{-2}{a^2} = 1$ ، $a^2 = -2$

لا يوجد قطع زائد

السؤال (٣) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(3, 2)$ ، $(4, 3)$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، $\frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، $\frac{16}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$

$\frac{-7}{b^2} = -7$ ، $b^2 = 1$ ، $a^2 = 4$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

السؤال (٤) أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(\pm 4, 0)$ ومعادلتا مقارباه $y = \pm 2x$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4a^2} = 1$

$a^2 + b^2 = 16$ ، $a^2 + 4a^2 = 16$ ، $5a^2 = 16$ ، $a^2 = \frac{16}{5}$

$\frac{x^2}{\frac{16}{5}} - \frac{y^2}{\frac{64}{5}} = 1$ ، $\frac{5x^2}{16} - \frac{5y^2}{64} = 1$

السؤال (٥) أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(0, \pm 6)$ ومعادلتا مقارباه $y = \pm x$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ، $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

$a^2 + b^2 = 36$ ، $a^2 + a^2 = 36$ ، $2a^2 = 36$ ، $a^2 = 18$

$\frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{18} = 1$

السؤال (٦) أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(0, \pm 3)$ ومعادلتا مقارباه $y = \pm \frac{3}{4}x$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ، $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\frac{16}{9}a^2} = 1$

$a^2 + b^2 = 9$ ، $a^2 + \frac{16}{9}a^2 = 9$ ، $\frac{25}{9}a^2 = 9$ ، $a^2 = \frac{81}{25}$

$\frac{y^2}{\frac{81}{25}} - \frac{x^2}{\frac{144}{25}} = 1$ ، $\frac{25y^2}{81} - \frac{25x^2}{144} = 1$

السؤال (٧) أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(\pm 5, 0)$ ومعادلتا مقارباه $y = \pm \frac{4}{3}x$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\frac{16}{9}a^2} = 1$

$a^2 + b^2 = 25$ ، $a^2 + \frac{16}{9}a^2 = 25$ ، $\frac{25}{9}a^2 = 25$ ، $a^2 = 9$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

السؤال (٨) أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(0, \pm 4)$ ومعادلتا مقارباه $y = \pm 3x$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ، $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\frac{1}{9}a^2} = 1$

$a^2 + b^2 = 16$ ، $a^2 + \frac{1}{9}a^2 = 16$ ، $\frac{10}{9}a^2 = 16$ ، $a^2 = \frac{72}{5}$

$\frac{y^2}{\frac{72}{5}} - \frac{x^2}{\frac{8}{5}} = 1$ ، $\frac{5y^2}{72} - \frac{5x^2}{8} = 1$

السؤال (٩) أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(\pm 4, 0)$ ومعادلتا مقارباه $y = \pm x$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$

$a^2 + b^2 = 16$ ، $a^2 + a^2 = 16$ ، $2a^2 = 16$ ، $a^2 = 8$

$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

السؤال (١٠) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(4, 3\sqrt{2})$ ومعادلتا مقارباه $y = \pm x$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$

$\frac{16}{a^2} - \frac{18}{a^2} = 1$ ، $\frac{-2}{a^2} = 1$ ، $a^2 = -2$

لا يوجد قطع زائد

الحل (١) نبدأ بالمعادلة التي تحتوي على أقل عدد من المجاهيل وهي المعادلة الثالثة :

نعوض عن $ل_{١}$ في المعادلتين الأولى والثانية :

$$\frac{٦٣}{ص_{٢}} - \frac{٦٤}{ع_{٢}} = ١ \quad (٢) \qquad \frac{٤}{ص_{٢}} - \frac{٣}{ع_{٢}} = ١ \quad (١)$$

نعوض عن $\frac{١}{ص_{٢}} = س$ ، $\frac{١}{ع_{٢}} = ص$ في المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن :

$$٦٣س - ٦٤ص = ١ \quad (٢) \qquad ٤س - ٣ص = ١ \quad (١)$$

بضرب المعادلة (١) في ٦٤ ثم طرح المعادلة (٢) نجد أن :

$$٦٤ص - ٦٣س = ٦٤ - ٦٣ \Rightarrow ص = ١$$

$$٤س - ٣ص = ١ \Rightarrow ٤س - ٣ = ١ \Rightarrow س = ١$$

$$\frac{١}{ع_{٢}} = ١ \Rightarrow ع_{٢} = ١ \Rightarrow ع = ١$$

$$\frac{١}{ص_{٢}} = ١ \Rightarrow ص_{٢} = ١ \Rightarrow ص = ١$$

$$\frac{١}{ل_{٢}} = ١ \Rightarrow ل_{٢} = ١ \Rightarrow ل = ١$$

$$\frac{٥}{ل} = \frac{٤}{٨} \Rightarrow ل = ١٠$$

$$ل_{١}^{٢} - ل^{٢} = ع_{١}^{٢} \Rightarrow ١٠٠ - ٦٤ = ع_{١}^{٢} \Rightarrow ع_{١} = ٦$$

$$\frac{١}{ص_{١}^{٢}} - \frac{١}{س_{١}^{٢}} = ١ \Rightarrow \frac{١}{ص_{١}^{٢}} - \frac{١}{٦^{٢}} = ١$$

$$ص_{١} = ٣ \Rightarrow ص = ٢$$

$$\therefore ل_{١}^{٢} - ل^{٢} = ص_{١}^{٢} \Rightarrow ٩ - ٤ = ص_{١}^{٢} \Rightarrow ص_{١} = ٥$$

$$\frac{١}{ص_{٢}^{٢}} - \frac{١}{س_{٢}^{٢}} = ١ \Rightarrow \frac{١}{ص_{٢}^{٢}} - \frac{١}{٤^{٢}} = ١$$

$$\frac{١}{ل_{٢}^{٢}} = \frac{٣}{٥} \Rightarrow ل = ٤ ، ل_{٢} = ٨$$

$$ب) \quad ٢ل = ١٦ \Rightarrow ل = ٨ ، \frac{١}{ل_{٢}^{٢}} = \frac{٤}{٥}$$

$$\frac{١}{ل_{١}^{٢}} = \frac{٤}{٨} \Rightarrow ل_{١} = ١٠$$

$$ل_{١}^{٢} - ل^{٢} = ص_{١}^{٢} \Rightarrow ١٠٠ - ٦٤ = ص_{١}^{٢} \Rightarrow ص_{١} = ٦$$

$$\frac{١}{ص_{١}^{٢}} - \frac{١}{س_{١}^{٢}} = ١ \Rightarrow \frac{١}{ص_{١}^{٢}} - \frac{١}{٦^{٢}} = ١$$

$$ص_{١} = ٣ \Rightarrow ص = ٢$$

$$\frac{١}{ع_{٢}^{٢}} = \frac{٤}{٥} \Rightarrow ع = ٨ ، ع_{٢} = ١٦$$

$$\frac{١}{ص_{٢}^{٢}} - \frac{١}{س_{٢}^{٢}} = ١ \Rightarrow \frac{١}{ص_{٢}^{٢}} - \frac{١}{٨^{٢}} = ١$$

$$\therefore ل_{٢}^{٢} - ع^{٢} = ص_{٢}^{٢} \Rightarrow ٢٥ - ١٦ = ص_{٢}^{٢} \Rightarrow ص_{٢} = ٣$$

$$ص = ٢ \Rightarrow ص = ٨ \Rightarrow ٢ل = ١٠ \Rightarrow ل = ٥ ، ٢ص = ٦$$

م١ : إذا مماسا دائرة وطول وتر بينهما يساوي قطر الدائرة فإن المماسين متعامدان.

دائرة مركزها (٠ ، ٠) ومعادلتها $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$

م٢ : مماسا دائرة عند طرفي قطر فيها متوازيان. برهن

البرهان في صورة فقرات على الرسم المقابل م رسم ثم كتب ما (١)
يساويه.

م٣ : دائرة مركزها (٠ ، ٠) ومعادلتها $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$ مماس عند النقطة (٣ ، ٤) فإن معادلة المماس هي (١)

$$\frac{س}{٥}^٢ + \frac{ص}{٤}^٢ = ١$$

$$\frac{س}{٢٥} + \frac{ص}{٩} = ١$$

المماس هو $٣س + ٤ص = ٢٥$

تمرين ٢ - ٣

م١ : إذا مماسا دائرة طولا وتر فيها يصنعان قطر مع وتر واحد فإن المماسين متعامدان

دائرة مركزها (٠ ، ٠) ومعادلتها $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$

$$\frac{س}{٥}^٢ + \frac{ص}{٤}^٢ = ١$$

$$\frac{س}{٢٥} + \frac{ص}{٩} = ١$$

المماس هو $٣س + ٤ص = ٢٥$

$$\frac{س}{٥}^٢ - \frac{ص}{٤}^٢ = ١$$ المماس هو

$$س_١^٢ = ٣٦ \Rightarrow س = ٦ \ ، \ ص_١^٢ = ٤ \Rightarrow ص = ٢$$

المماس هو $٦س + ٢ص = ٢٥$

دائرة مركزها (٠ ، ٠) ونصف قطرها $ن$ ومماس ميله $م$ فإن معادلته $ص = م س \pm ن \sqrt{م^٢ + ١}$

دائرة مركزها (٠ ، ٠) ونصف قطرها ٦ ومماس ميله $\frac{٣}{٤}$ فإن معادلته $ص = \frac{٣}{٤} س \pm ٦ \sqrt{\frac{٩}{١٦} + ١}$

$ص = \frac{٣}{٤} س \pm ٦ \times \frac{٥}{٤}$

$٤ص = ٣س \pm ٣٠$

$٣س - ٤ص \pm ٣٠ = ٠$

دائرة مركزها (٠ ، ٠) ومماس معادلته $٣س + ٤ص = ٢٥$ فإن طول نصف قطرها $ن$

$ن = \frac{|ج|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} = \frac{|-٢٥|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$

دائرة مركزها (٠ ، ٠) ومماس معادلته $٣س + ٤ص = ٢٥$ فإن طول نصف قطرها $ن$

$ن = \frac{|ج|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} = \frac{|-٢٥|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$

دائرة مركزها (٠ ، ٠) ومماس معادلته $٣س + ٤ص = ٢٥$ فإن طول نصف قطرها $ن$

$ن = \frac{|ج|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} = \frac{|-٢٥|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$

دائرة مركزها (٠ ، ٠) ومماس معادلته $٣س + ٤ص = ٢٥$ فإن طول نصف قطرها $ن$

$ن = \frac{|ج|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} = \frac{|-٢٥|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$

دائرة مركزها (٠ ، ٠) ومماس معادلته $٣س + ٤ص = ٢٥$ فإن طول نصف قطرها $ن$

$ن = \frac{|ج|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} = \frac{|-٢٥|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$

س٦ : إذا مثل معادلة دائرة وجد دائرة تمر بنقطة الأصل

ثم أوجد معادلة المماس المرسوم من النقطة (٥ ، $\frac{٩}{٤}$) على الدائرة

س٥ : إذا كانت $\frac{س^{٢}}{٩} + \frac{ص^{٢}}{١٦} = ١$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل

أوجد طول كل من محوريه ثم أوجد البعد بين بؤرتيه

س٦ : إذا مثل معادلة دائرة وجد دائرة تمر بنقطة الأصل

$\frac{س^{٢}}{٩} + \frac{ص^{٢}}{١٦} = ١$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل

ومحوره الأكبر ينطبق على محور السينات وطوله ضعف طول محوره الأصغر

س٧ : إذا مثل معادلة دائرة وجد دائرة تمر بنقطة الأصل

ومركزها النقطة (٣ ، ٤) ثم أوجد البعد بين مركزي الدائرتين

س٨ : إذا كان $\frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل

أوجد طول كل من محوريه ثم أوجد البعد بين بؤرتيه

فهرست مطالب

مقدمه ۱۰۳

۲۰۳ ۱۰ مقاله چهارم در اندازه گیری مساحت چند ضلعی

۲۰۳ ۱۱ تعاریف اولیه

۲۰۳ ۱۲ مقاله دوم در مساحت چند ضلعی

۲۰۳ ۱۳ قضیه فیثاغورث

۲۰۳ ۱۴ قضیه تعمیم یافته فیثاغورث

۲۰۳ ۱۵ مساحت اشکال منتظم

۲۰۳ ۱۶ مقاله چهارم در مساحت دایره

۲۰۳ ۱۷ تعاریف اولیه

۲۰۳ ۱۸ اندازه محیط

۲۰۳ ۱۹ مساحت دایره

۲۰۳ ۲۰ مقاله پنجم در نسبت طولها

۲۰۳ ۲۱ تعاریف اولیه

۲۰۳ ۲۲ مقاله ششم در تشابه

۲۰۳ ۲۳ تعاریف اولیه

۲۰۳ ۲۴ قضیه تالس

۲۰۳ ۲۵ قضیه فیثاغورث

۲۰۳ ۲۶ مقاله هفتم در نظریه اعداد

۲۰۳ ۲۷ تعاریف اولیه

۲۰۳ ۲۸ اعداد اول

۲۰۳ ۲۹ روش اقلیدسی

۲۰۳ ۳۰ مقاله هشتم در اعداد کامل

۲۰۳ ۳۱ مقاله نهم در اعداد اول

۲۰۳ ۳۲ مقاله دهم در اعداد گنگ (گویا)

۲۰۳ ۳۳ تعاریف اولیه

۲۰۳ ۳۴ قضیه فیثاغورث

۲۰۳ ۳۵ مقاله یازدهم در هندسه فضایی

۲۰۳ ۳۶ مقاله دوازدهم در حجم اجسام

۲۰۳ ۳۷ مقاله سیزدهم در ساختن اجسام منتظم

٣ـ ١ المشتقة

لدراسة تغير دالة لقد تعرفنا في السنة الماضية على أن معدل تغير كمية ما بالنسبة للزمن يعبر عنه بالمشتقة الأولى للدالة التي تمثل هذه الكمية.

تعريف (١) مشتقة دالة عند نقطة

ليكن $\mathbb{R}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ ، f دالة حقيقية معرفة على A ، $a \in A$ و A تحتوي على فترة مفتوحة مركزها a.

نقول إن f قابلة للاشتقاق عند a إذا وجد $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ وهو عدد حقيقي.

هذه النهاية تسمى مشتقة f عند a ونرمز لها بالرمز $f'(a)$.

إذن $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

تعريف (٢) مشتقة دالة على يمين نقطة

ليكن $\mathbb{R}$ ، f دالة حقيقية معرفة على A ، $a \in A$ و A تحتوي على فترة من الشكل $[a, a + \alpha[$ حيث $\alpha > 0$.

نقول إن f قابلة للاشتقاق على يمين a إذا وجد $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ وهو عدد حقيقي.

هذه النهاية تسمى مشتقة f على يمين a ونرمز لها بالرمز $f'_d(a)$.

إذن $f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

تعريف (٣) مشتقة دالة على يسار نقطة

ليكن $\mathbb{R}$ ، f دالة حقيقية معرفة على A ، $a \in A$ و A تحتوي على فترة من الشكل $]a - \alpha, a]$ حيث $\alpha > 0$.

نقول إن f قابلة للاشتقاق على يسار a إذا وجد $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ وهو عدد حقيقي.

هذه النهاية تسمى مشتقة f على يسار a ونرمز لها بالرمز $f'_g(a)$.

إذن $f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

تعريف (٤) مشتقة دالة على مجال مفتوح

ليكن $\mathbb{R}$ ، f دالة حقيقية معرفة على A ، I مجال مفتوح من $\mathbb{R}$ و $I \subset A$.

نقول إن f قابلة للاشتقاق على I إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند كل عدد من I.

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I فإن الدالة التي ترفق بكل x من I العدد $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f على I.

تعريف (٥) مشتقة دالة على اليمين وعلى اليسار عند نقطة

ليكن $\mathbb{R}$ ، f دالة حقيقية معرفة على A ، $a \in A$ و A تحتوي على فترة من الشكل $]a - \alpha, a + \alpha[$ حيث $\alpha > 0$.

نقول إن f قابلة للاشتقاق عند a إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على يمين a وعلى يسار a و $f'_d(a) = f'_g(a)$.

في هذه الحالة $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

تعريف (٦) مشتقة مجموع دالتين ومشتقة جداء دالة بعدد حقيقي

ليكن $\mathbb{R}$ ، f و g دالتين حقيقيتين معرفتين على A ، $a \in A$ و A تحتوي على فترة مفتوحة مركزها a.

إذا كانت f و g قابلتين للاشتقاق عند a فإن $f + g$ قابلة للاشتقاق عند a و $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند a فإن αf قابلة للاشتقاق عند a و $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$

تعريف (٧) مشتقة جداء دالتين

ليكن $\mathbb{R}$ ، f و g دالتين حقيقيتين معرفتين على A ، $a \in A$ و A تحتوي على فترة مفتوحة مركزها a.

إذا كانت f و g قابلتين للاشتقاق عند a فإن fg قابلة للاشتقاق عند a و $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

تعريف (٨) مشتقة مقلوب دالة

ليكن $\mathbb{R}$ ، f دالة حقيقية معرفة على A ، $a \in A$ و A تحتوي على فترة مفتوحة مركزها a.

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند a و $f(a) \neq 0$ فإن $\frac{1}{f}$ قابلة للاشتقاق عند a و $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \frac{-f'(a)}{f(a)^2}$

ومنه مشتقة خارج دالتين

$$= \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2} \quad \text{، المقام} \neq \text{صفر}$$

$$\frac{f}{g}(a) = \frac{f(a) \times g'(a) - g(a) \times f'(a)}{[f(a)]^2}$$

ومنه $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)$:

تعريف (٩) مشتقة الدالة $x \mapsto [f(x)]^n$ ، حيث $n \in \mathbb{N}^*$:

تمرين ٢ - ١

(١) إذا كان $ص = ٣س^{٢} - ٤س^{٣} - ٧س + ١٠$ فجد :

الحل $\frac{ص}{س} = ص_{١} = ٩س^{٢} - ١٢س - ٧$

$\frac{ص}{س} = ص_{١}$ ، $\frac{ص}{س}(\frac{ص}{س}) = ص_{٢} = ١٨س - ١٢$

(٢) إذا كان $ص = (٢س + ١)^{٣}$ فجد $ص_{٢}$ عندما $س = ٢$

الحل $ص = (٢س + ١)^{٣}$ ∴ $ص_{١} = ٣(٢س + ١)^{٢} \times ٢ = ٦(٢س + ١)^{٢}$

$ص_{١} = ٦(٢ + ١)^{٢} \times ١ = ٦(٣)^{٢}$

$ص_{١} = ٦ \times ٩ = ٥٤$ ، $ص_{٢} = ٢ \times ٥٤ = ١٠٨$ عندما $س = ٢$.

∴ $ص_{٢} = ٦(٢ + ١) = ٦ \times ٣ = ١٨$

تمرين ٢ - ١

(١) إذا كان $ص = ٣س^{٢} - ٤س^{٣} - ٧س + ١٠$ فجد :

(أ) $\frac{ص}{س}$ (ب) $\frac{ص}{س}(\frac{ص}{س})$

(٢) إذا كان $ص = (٢س - ١)^{٣}$ فجد $ص_{٢}$ عندما $س = ١$

(٣) إذا كان $ص = \frac{١}{(٣س^{٢} - ٢)^{٢}}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٤) إذا كان $ص = (٢س^{٢} - س)^{٣}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٥) إذا كان $ص = ٤س(٣س^{٢} - ٢)^{٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٣٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٣١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٣٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٣٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٣٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٣٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٣٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٣٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٣٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٣٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٤٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٤١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٤٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٤٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٤٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٤٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٤٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٤٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٤٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٤٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٥٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٥١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٥٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٥٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٥٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٥٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٥٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٥٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٥٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٥٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٦٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٦١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٦٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٦٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٦٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٦٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٦٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٦٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٦٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٦٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٧٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٧١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٧٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٧٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٧٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٧٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٧٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٧٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٧٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٧٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٨٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٨١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٨٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٨٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٨٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٨٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٨٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٨٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٨٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٨٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٩٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٩١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٩٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٩٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٩٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٩٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٩٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٩٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٩٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٩٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٠٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٠١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٠٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٠٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٠٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٠٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٠٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٠٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٠٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٠٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١١٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١١١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١١٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١١٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١١٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١١٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١١٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١١٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١١٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١١٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٢٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٢١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٢٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٢٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٢٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٢٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٢٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٢٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٢٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٢٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٣٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٣١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٣٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٣٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٣٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٣٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٣٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٣٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٣٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٣٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٤٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٤١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٤٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٤٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٤٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٤٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٤٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٤٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٤٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٤٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٥٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٥١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٥٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٥٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٥٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٥٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٥٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٥٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٥٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٥٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٦٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٦١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٦٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٦٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٦٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٦٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٦٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٦٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٦٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٦٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٧٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٧١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٧٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٧٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٧٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٧٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٧٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٧٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٧٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٧٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٨٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٨١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٨٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٨٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٨٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٨٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٨٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٨٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٨٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٨٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٩٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٩١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٩٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٩٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٩٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٩٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٩٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٩٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(١٩٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(١٩٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٠٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٠١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٠٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٠٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٠٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٠٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٠٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٠٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٠٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٠٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢١٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢١١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢١٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢١٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢١٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢١٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢١٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢١٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢١٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢١٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٢٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٢١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٢٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٢٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٢٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٢٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٢٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٢٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٢٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٢٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٣٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٣١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٣٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٣٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٣٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٣٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٣٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٣٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٣٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٣٩) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٤٠) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٤١) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٤٢) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٤٣) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٤٤) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٤٥) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٤٦) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٤٧) إذا كان $ص = \frac{٢س - ١}{٣س + ٢}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ١$

(٢٤٨) إذا كان $ص = \frac{٣س^{٢} + ٢}{٢س - ١}$ فجد $ص_{١}$ عندما $س = ٢$

(٢٤٩)

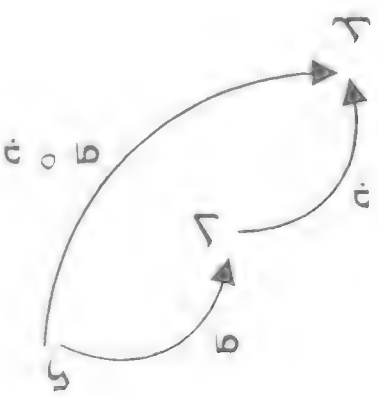
$$(ق \circ ب)(س) = ق\,[\,ب(س)\,]$$

مثال (٣) إذا كان $ق(س) = ٣س^{٢} - ٥$

أوجد $ق \circ ب$ ، $(ق \circ ب)$ ، $ب \circ ق$ ، $(ب \circ ق)$ ، $(ق \circ ق)$

$$ب(س) = \frac{١}{٣ - س} \quad ،\quad س \neq ٣$$

أوجد $ق \circ ب$ ، $(ق \circ ب)$ ، $ب \circ ق$ ، $(ب \circ ق)$ ، $(ق \circ ق)$



الحل

$$(ق \circ ب)(س) = ق\,[\,ب(س)\,] = ق\left(\frac{١}{٣ - س}\right) = ٣\left(\frac{١}{٣ - س}\right)^{٢} - ٥$$

$$= \frac{٣}{(٣ - س)^{٢}} - ٥ = \frac{٣ - ٥(٣ - س)^{٢}}{(٣ - س)^{٢}}$$

$$\therefore \text{مجال } ق \circ ب = ك - \{٣\}$$

$$(ب \circ ق)(س) = ب(ق(س)) = \frac{١}{٣ - ق(س)} = \frac{١}{٣ - (٣س^{٢} - ٥)} = \frac{١}{٨ - ٣س^{٢}}$$

$$\therefore \text{مجال } ب \circ ق = ك - \left\{\pm\sqrt{\frac{٨}{٣}}\right\}$$

$$(ق \circ ق)(س) = ق(ق(س)) = ٣(٣س^{٢} - ٥)^{٢} - ٥ = ٣(٩س^{٤} - ٣٠س^{٢} + ٢٥) - ٥$$

$$= ٢٧س^{٤} - ٩٠س^{٢} + ٧٠$$

$$\therefore \text{مجال } ق \circ ق = ك$$

$$(ب \circ ب)(س) = ب(ب(س)) = \frac{١}{٣ - ب(س)} = \frac{١}{٣ - \frac{١}{٣ - س}} = \frac{٣ - س}{٨ - ٣س}$$

$$\therefore \text{مجال } ب \circ ب = ك - \left\{\frac{٨}{٣}\right\}$$

مثال (٤) إذا كان $ق(س) = س^{٢} - ٥$ ، $(س - ٤)^{٢} \leq$ مقدار ، $س > ٠$

أوجد $ق(س)$ ، $ب(س)$ ، $(ق \circ ب)(س)$ ، $(ب \circ ق)(س)$

$$ب(س) = \frac{س^{٢}}{٢}\ ،\ س \neq ٠$$

$$(ق \circ ب)(س) = \frac{(س - ٥)^{٢}}{٢}$$

$$(ب \circ ق)(س) = \frac{١ + س^{٣}}{٣س + ١} \quad (س \neq ١)$$

(٢) إذا كان مجال $ب = \dfrac{(س - ١)^{٢}}{٣س + ١}$ (س ≠ ١) فجد $ق$:

$$٣ - ٢\,ص_{١}\,ص_{٢} + ٤(س - ١)\frac{ص}{ص_{١}} + (س - ١)^{٢}\frac{ص}{ص_{٢}} = \text{مقدار}$$

٣ - ٢ معادلة دائرة

دائرة مثلث رءوسها هى نقطة الأصل ونقطتان تنتميان إلى محور السينات ومجموعها ص

$ق : ك \to ل$ دالة ، $ب : ل \to ك$ دالة ، إذا كانت $ه : ك \to ك$

بحيث $(ق \circ ب)(س) = س$ لكل $س \in ك$ ، إذا $ص \in ل$.

فإن $ص = (ب \circ ق)(س)$ وإذا كان $ق(س)$ هى مجموعة كل الأزواج المرتبة $(س ، ص)$ فإن $ب$

الحل: (٥) نفرض أن $ص = س^{٣} + ٣$

$$\frac{د ص}{د س} = ٣ س^{٢} \neq ٠ \text{ عند } س = ٠$$

$$\frac{د س}{د ص} = \frac{١}{٣ س^{٢}}$$

$$\frac{د^{٢} س}{د ص^{٢}} = -\frac{٦ س}{(٣ س^{٢})^{٣}}$$

$$= -\frac{٢}{٩ س^{٥}}$$

$$\frac{د^{٣} س}{د ص^{٣}} = \frac{٣٠ س^{٤}}{٢٧ س^{٦}} = \frac{١٠}{٩ س^{٢}}$$

$$\frac{د^{٤} س}{د ص^{٤}} = -\frac{٢٠ س}{٨١ س^{٤}} = -\frac{٢٠}{٨١ س^{٣}}$$

$$\frac{د^{٥} س}{د ص^{٥}} = \frac{٦٠ س^{٢}}{٢٤٣ س^{٦}} = \frac{٢٠}{٨١ س^{٤}}$$

$$\frac{د^{٦} س}{د ص^{٦}} = -\frac{٨٠ س^{٣}}{٧٢٩ س^{٨}} = -\frac{٨٠}{٧٢٩ س^{٥}}$$

$$\frac{د^{٧} س}{د ص^{٧}} = \frac{٤٠٠ س^{٤}}{٢١٨٧ س^{١٠}} = \frac{٤٠٠}{٢١٨٧ س^{٦}}$$

$$\frac{د^{٨} س}{د ص^{٨}} = -\frac{٢٤٠٠ س^{٥}}{٦٥٦١ س^{١٢}} = -\frac{٢٤٠٠}{٦٥٦١ س^{٧}}$$

$$\frac{د^{٩} س}{د ص^{٩}} = \frac{١٩٢٠٠ س^{٦}}{١٩٦٨٣ س^{١٤}} = \frac{١٩٢٠٠}{١٩٦٨٣ س^{٨}}$$

$$\frac{د^{١٠} س}{د ص^{١٠}} = -\frac{١٥٣٦٠٠ س^{٧}}{٥٩٠٤٩ س^{١٦}} = -\frac{١٥٣٦٠٠}{٥٩٠٤٩ س^{٩}}$$

$$\frac{د^{١١} س}{د ص^{١١}} = \frac{١٣٨٢٤٠٠ س^{٨}}{١٧٧١٤٧ س^{١٨}} = \frac{١٣٨٢٤٠٠}{١٧٧١٤٧ س^{١٠}}$$

$$\frac{د^{١٢} س}{د ص^{١٢}} = -\frac{١٢٤٤١٦٠٠ س^{٩}}{٥٣١٤٤١ س^{٢٠}} = -\frac{١٢٤٤١٦٠٠}{٥٣١٤٤١ س^{١١}}$$

$$\frac{د^{١٣} س}{د ص^{١٣}} = \frac{١١٩٥٨٤٠٠ س^{١٠}}{١٥٩٤٣٢٣ س^{٢٢}} = \frac{١١٩٥٨٤٠٠}{١٥٩٤٣٢٣ س^{١٢}}$$

$$\frac{د^{١٤} س}{د ص^{١٤}} = -\frac{١١٩٥٨٤٠٠ س^{١١}}{٤٧٨٢٩٦٩ س^{٢٤}} = -\frac{١١٩٥٨٤٠٠}{٤٧٨٢٩٦٩ س^{١٣}}$$

$$\frac{د^{١٥} س}{د ص^{١٥}} = \frac{١٢٤٤١٦٠٠ س^{١٢}}{١٤٣٤٩٠٧ س^{٢٦}} = \frac{١٢٤٤١٦٠٠}{١٤٣٤٩٠٧ س^{١٤}}$$

$$\frac{د^{١٦} س}{د ص^{١٦}} = -\frac{١٢٤٤١٦٠٠ س^{١٣}}{٣٨٦٥٢٨٩ س^{٢٨}} = -\frac{١٢٤٤١٦٠٠}{٣٨٦٥٢٨٩ س^{١٥}}$$

$$\frac{د^{١٧} س}{د ص^{١٧}} = \frac{١١٩٥٨٤٠٠ س^{١٤}}{١٠٤٣٩٧٨٣ س^{٣٠}} = \frac{١١٩٥٨٤٠٠}{١٠٤٣٩٧٨٣ س^{١٦}}$$

$$\frac{د^{١٨} س}{د ص^{١٨}} = -\frac{١١٩٥٨٤٠٠ س^{١٥}}{٢٨١٨٧٣٥٣ س^{٣٢}} = -\frac{١١٩٥٨٤٠٠}{٢٨١٨٧٣٥٣ س^{١٧}}$$

$$\frac{د^{١٩} س}{د ص^{١٩}} = \frac{١٠٧٣٦٥٦٠٠ س^{١٦}}{٧٥٨٢٠٨٤٥ س^{٣٤}} = \frac{١٠٧٣٦٥٦٠٠}{٧٥٨٢٠٨٤٥ س^{١٨}}$$

$$\frac{د^{٢٠} س}{د ص^{٢٠}} = -\frac{٩٦٥٩٠٤٠٠ س^{١٧}}{٢٠٤٨٥٥١٥ س^{٣٦}} = -\frac{٩٦٥٩٠٤٠٠}{٢٠٤٨٥٥١٥ س^{١٩}}$$

$$\frac{د^{٢١} س}{د ص^{٢١}} = \frac{٨٦٣١٣٦٠٠ س^{١٨}}{٥٥٠٨٩٠٧٥ س^{٣٨}} = \frac{٨٦٣١٣٦٠٠}{٥٥٠٨٩٠٧٥ س^{٢٠}}$$

$$\frac{د^{٢٢} س}{د ص^{٢٢}} = -\frac{٧٧٧٨٢٤٠٠ س^{١٩}}{١٤٨٤٠٤٠٢٥ س^{٤٠}} = -\frac{٧٧٧٨٢٤٠٠}{١٤٨٤٠٤٠٢٥ س^{٢١}}$$

$$\frac{د^{٢٣} س}{د ص^{٢٣}} = \frac{٦٩٩٠٣٦٠٠ س^{٢٠}}{٤٠٠٩٠٩٦٧٥ س^{٤٢}} = \frac{٦٩٩٠٣٦٠٠}{٤٠٠٩٠٩٦٧٥ س^{٢٢}}$$

$$\frac{د^{٢٤} س}{د ص^{٢٤}} = -\frac{٦٢٩١٢٤٠٠ س^{٢١}}{١٠٨٢٤٥٩٨١٥ س^{٤٤}} = -\frac{٦٢٩١٢٤٠٠}{١٠٨٢٤٥٩٨١٥ س^{٢٣}}$$

$$\frac{د^{٢٥} س}{د ص^{٢٥}} = \frac{٥٦٦٢٠١٦٠٠ س^{٢٢}}{٢٩٢٦٢٤٥٧٠٧ س^{٤٦}} = \frac{٥٦٦٢٠١٦٠٠}{٢٩٢٦٢٤٥٧٠٧ س^{٢٤}}$$

الحل: (٦) نفرض أن $ص = س^{٢} + ٣$

$$\frac{د ص}{د س} = ٢ س \neq ٠ \text{ عند } س = ٠$$

$$\frac{د س}{د ص} = \frac{١}{٢ س}$$

$$\frac{د^{٢} س}{د ص^{٢}} = -\frac{٢}{(٢ س)^{٣}}$$

$$= -\frac{١}{٤ س^{٣}}$$

$$\frac{د^{٣} س}{د ص^{٣}} = \frac{٣}{٨ س^{٥}}$$

$$\frac{د^{٤} س}{د ص^{٤}} = -\frac{١٥}{١٦ س^{٧}}$$

$$\frac{د^{٥} س}{د ص^{٥}} = \frac{١٠٥}{٣٢ س^{٩}}$$

$$\frac{د^{٦} س}{د ص^{٦}} = -\frac{٩٤٥}{٦٤ س^{١١}}$$

$$\frac{د^{٧} س}{د ص^{٧}} = \frac{١٠٣٩٥}{١٢٨ س^{١٣}}$$

$$\frac{د^{٨} س}{د ص^{٨}} = -\frac{١٣٥١٣٥}{٢٥٦ س^{١٥}}$$

$$\frac{د^{٩} س}{د ص^{٩}} = \frac{١٩٧٧٩٧٥}{٥١٢ س^{١٧}}$$

$$\frac{د^{١٠} س}{د ص^{١٠}} = -\frac{٣٠٣٠٦٣٥}{١٠٢٤ س^{١٩}}$$

$$\frac{د^{١١} س}{د ص^{١١}} = \frac{٤٨٤٩٠١٢٥}{٢٠٤٨ س^{٢١}}$$

$$\frac{د^{١٢} س}{د ص^{١٢}} = -\frac{٧٧٨٤١٩٧٥}{٤٠٩٦ س^{٢٣}}$$

$$\frac{د^{١٣} س}{د ص^{١٣}} = \frac{١٢٤٤٧١٦٠٠}{٨١٩٢ س^{٢٥}}$$

$$\frac{د^{١٤} س}{د ص^{١٤}} = -\frac{٢٠٠٣٢٥٦٢٥}{١٦٣٨٤ س^{٢٧}}$$

$$\frac{د^{١٥} س}{د ص^{١٥}} = \frac{٣٢٠٥١٠٠٠٠}{٣٢٧٦٨ س^{٢٩}}$$

$$\frac{د^{١٦} س}{د ص^{١٦}} = -\frac{٥١٢٨١٦٠٠٠}{٦٥٥٣٦ س^{٣١}}$$

$$\frac{د^{١٧} س}{د ص^{١٧}} = \frac{٨٢٠٩٨٥٦٠٠}{١٣١٠٧٢ س^{٣٣}}$$

$$\frac{د^{١٨} س}{د ص^{١٨}} = -\frac{١٣١٣٧٦٩٦٠٠}{٢٦٢١٤٤ س^{٣٥}}$$

$$\frac{د^{١٩} س}{د ص^{١٩}} = \frac{٢١٠٢٠٣٣٦٠٠}{٥٢٤٢٨٨ س^{٣٧}}$$

$$\frac{د^{٢٠} س}{د ص^{٢٠}} = -\frac{٣٣٦٣٢٥٣٧٦٠٠}{١٠٤٨٥٧٦ س^{٣٩}}$$

$$\frac{د^{٢١} س}{د ص^{٢١}} = \frac{٥٣٨١٨٠٦٠٢٥٠٠}{٢٠٩٧١٥٢ س^{٤١}}$$

$$\frac{د^{٢٢} س}{د ص^{٢٢}} = -\frac{٨٦١٠٨٩٦٠٤٠٠}{٤١٩٤٣٠٤ س^{٤٣}}$$

$$\frac{د^{٢٣} س}{د ص^{٢٣}} = \frac{١٣٧٧٤٣٣٦٠٦٤٠٠}{٨٣٨٨٦٠٨ س^{٤٥}}$$

$$\frac{د^{٢٤} س}{د ص^{٢٤}} = -\frac{٢٢٠٣٨٩٣٧٠٢٤٠٠}{١٦٧٧٢١٦ س^{٤٧}}$$

$$\frac{د^{٢٥} س}{د ص^{٢٥}} = \frac{٣٥٢٦٢٣٠٠٣٨٤٠٠}{٣٣٥٤٤٣٢ س^{٤٩}}$$

الحل: (٧) نفرض أن $ص = س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٣$

$$\frac{د ص}{د س} = ٣ س^{٢} + ٦ س \neq ٠ \text{ عند } س = ٠$$

$$\frac{د س}{د ص} = \frac{١}{٣ س^{٢} + ٦ س}$$

$$\frac{د^{٢} س}{د ص^{٢}} = -\frac{٦ س + ٦}{(٣ س^{٢} + ٦ س)^{٣}}$$

$$= -\frac{٦ (س + ١)}{٢٧ س^{٣} (س + ٢)^{٣}}$$

$$= -\frac{٢ (س + ١)}{٩ س^{٣} (س + ٢)^{٣}}$$

$$\frac{د^{٣} س}{د ص^{٣}} = \frac{٢ (٣ س^{٢} + ٦ س + ١)}{٩ س^{٥} (س + ٢)^{٥}}$$

$$\frac{د^{٤} س}{د ص^{٤}} = -\frac{٢ (١٥ س^{٣} + ٣٠ س^{٢} + ٢٠ س + ٤)}{٨١ س^{٧} (س + ٢)^{٧}}$$

$$\frac{د^{٥} س}{د ص^{٥}} = \frac{٢ (٣٥ س^{٤} + ١٠٥ س^{٣} + ١٢٠ س^{٢} + ٦٠ س + ١٢)}{٨١ س^{٩} (س + ٢)^{٩}}$$

$$\frac{د^{٦} س}{د ص^{٦}} = -\frac{٢ (٦٣ س^{٥} + ٢٧٠ س^{٤} + ٤٢٠ س^{٣} + ٣٠٠ س^{٢} + ٩٠ س + ٨)}{٧٢٩ س^{١١} (س + ٢)^{١١}}$$

$$\frac{د^{٧} س}{د ص^{٧}} = \frac{٤٠٠ (س + ١)^{٤}}{٢١٨٧ س^{١٠} (س + ٢)^{١٠}}$$

$$\therefore (ص \circ ع)(س) = \frac{-٤ س}{(٣ س^{٢} - ٨)}$$

الحل: (٤) نفرض أن $ع(س) = س^{٢} + ٥$ ، $ص(س) = ٣ س^{٣} + ٢ س - ١$

ولإيجاد $(ص \circ ع)(س)$ في أبسط صورة نوجد $(ص \circ ع)(١)$

$$\therefore (ص \circ ع)(س) = ص[ع(س)] = ص[س^{٢} + ٥]$$

$$= ٣ (س^{٢} + ٥)^{٣} + ٢ (س^{٢} + ٥) - ١$$

$$= ٣ (س^{٦} + ١٥ س^{٤} + ٧٥ س^{٢} + ١٢٥) + ٢ س^{٢} + ١٠ - ١$$

$$\therefore (ص \circ ع)(س) = ٣ س^{٦} + ٤٥ س^{٤} + ٢٢٧ س^{٢} + ٣٧٤$$

$$\therefore (ص \circ ع)(١) = ٣ \times ١ + ٤٥ \times ١ + ٢٢٧ \times ١ + ٣٧٤ = ٦٤٩$$

الحل: (٥) نفرض أن $ص = س^{٢} + ٣$

$$\frac{د ص}{د س} = ٢ س \neq ٠ \text{ عند } س = ٠$$

$$\frac{د س}{د ص} = \frac{١}{٢ س}$$

$$\frac{د^{٢} س}{د ص^{٢}} = -\frac{٢}{(٢ س)^{٣}}$$

$$= -\frac{١}{٤ س^{٣}}$$

$$\frac{د^{٣} س}{د ص^{٣}} = \frac{٣}{٨ س^{٥}}$$

$$\frac{د^{٤} س}{د ص^{٤}} = -\frac{١٥}{١٦ س^{٧}}$$

$$\frac{د^{٥} س}{د ص^{٥}} = \frac{١٠٥}{٣٢ س^{٩}}$$

$$\frac{د^{٦} س}{د ص^{٦}} = -\frac{٩٤٥}{٦٤ س^{١١}}$$

$$\frac{د^{٧} س}{د ص^{٧}} = \frac{١٠٣٩٥}{١٢٨ س^{١٣}}$$

$$\frac{د^{٨} س}{د ص^{٨}} = -\frac{١٣٥١٣٥}{٢٥٦ س^{١٥}}$$

$$\frac{د^{٩} س}{د ص^{٩}} = \frac{١٩٧٧٩٧٥}{٥١٢ س^{١٧}}$$

$$\frac{د^{١٠} س}{د ص^{١٠}} = -\frac{٣٠٣٠٦٣٥}{١٠٢٤ س^{١٩}}$$

$$\frac{د^{١١} س}{د ص^{١١}} = \frac{٤٨٤٩٠١٢٥}{٢٠٤٨ س^{٢١}}$$

$$\frac{د^{١٢} س}{د ص^{١٢}} = -\frac{٧٧٨٤١٩٧٥}{٤٠٩٦ س^{٢٣}}$$

$$\frac{د^{١٣} س}{د ص^{١٣}} = \frac{١٢٤٤٧١٦٠٠}{٨١٩٢ س^{٢٥}}$$

$$\frac{د^{١٤} س}{د ص^{١٤}} = -\frac{٢٠٠٣٢٥٦٢٥}{١٦٣٨٤ س^{٢٧}}$$

$$\frac{د^{١٥} س}{د ص^{١٥}} = \frac{٣٢٠٥١٠٠٠٠}{٣٢٧٦٨ س^{٢٩}}$$

$$\frac{د^{١٦} س}{د ص^{١٦}} = -\frac{٥١٢٨١٦٠٠٠}{٦٥٥٣٦ س^{٣١}}$$

$$\frac{د^{١٧} س}{د ص^{١٧}} = \frac{٨٢٠٩٨٥٦٠٠}{١٣١٠٧٢ س^{٣٣}}$$

$$\frac{د^{١٨} س}{د ص^{١٨}} = -\frac{١٣١٣٧٦٩٦٠٠}{٢٦٢١٤٤ س^{٣٥}}$$

$$\frac{د^{١٩} س}{د ص^{١٩}} = \frac{٢١٠٢٠٣٣٦٠٠}{٥٢٤٢٨٨ س^{٣٧}}$$

$$\frac{د^{٢٠} س}{د ص^{٢٠}} = -\frac{٣٣٦٣٢٥٣٧٦٠٠}{١٠٤٨٥٧٦ س^{٣٩}}$$

$$\frac{د^{٢١} س}{د ص^{٢١}} = \frac{٥٣٨١٨٠٦٠٢٥٠٠}{٢٠٩٧١٥٢ س^{٤١}}$$

$$\frac{د^{٢٢} س}{د ص^{٢٢}} = -\frac{٨٦١٠٨٩٦٠٤٠٠}{٤١٩٤٣٠٤ س^{٤٣}}$$

$$\frac{د^{٢٣} س}{د ص^{٢٣}} = \frac{١٣٧٧٤٣٣٦٠٦٤٠٠}{٨٣٨٨٦٠٨ س^{٤٥}}$$

$$\frac{د^{٢٤} س}{د ص^{٢٤}} = -\frac{٢٢٠٣٨٩٣٧٠٢٤٠٠}{١٦٧٧٢١٦ س^{٤٧}}$$

$$\frac{د^{٢٥} س}{د ص^{٢٥}} = \frac{٣٥٢٦٢٣٠٠٣٨٤٠٠}{٣٣٥٤٤٣٢ س^{٤٩}}$$

الحل: (٦) نفرض أن $ص = س^{٢} + ٣$

$$\frac{د ص}{د س} = ٢ س \neq ٠ \text{ عند } س = ٠$$

$$\frac{د س}{د ص} = \frac{١}{٢ س}$$

$$\frac{د^{٢} س}{د ص^{٢}} = -\frac{٢}{(٢ س)^{٣}}$$

$$= -\frac{١}{٤ س^{٣}}$$

$$\frac{د^{٣} س}{د ص^{٣}} = \frac{٣}{٨ س^{٥}}$$

$$\frac{د^{٤} س}{د ص^{٤}} = -\frac{١٥}{١٦ س^{٧}}$$

$$\frac{د^{٥} س}{د ص^{٥}} = \frac{١٠٥}{٣٢ س^{٩}}$$

$$\frac{د^{٦} س}{د ص^{٦}} = -\frac{٩٤٥}{٦٤ س^{١١}}$$

$$\frac{د^{٧} س}{د ص^{٧}} = \frac{١٠٣٩٥}{١٢٨ س^{١٣}}$$

$$\frac{د^{٨} س}{د ص^{٨}} = -\frac{١٣٥١٣٥}{٢٥٦ س^{١٥}}$$

$$\frac{د^{٩} س}{د ص^{٩}} = \frac{١٩٧٧٩٧٥}{٥١٢ س^{١٧}}$$

$$\frac{د^{١٠} س}{د ص^{١٠}} = -\frac{٣٠٣٠٦٣٥}{١٠٢٤ س^{١٩}}$$

$$\frac{د^{١١} س}{د ص^{١١}} = \frac{٤٨٤٩٠١٢٥}{٢٠٤٨ س^{٢١}}$$

$$\frac{د^{١٢} س}{د ص^{١٢}} = -\frac{٧٧٨٤١٩٧٥}{٤٠٩٦ س^{٢٣}}$$

$$\frac{د^{١٣} س}{د ص^{١٣}} = \frac{١٢٤٤٧١٦٠٠}{٨١٩٢ س^{٢٥}}$$

$$\frac{د^{١٤} س}{د ص^{١٤}} = -\frac{٢٠٠٣٢٥٦٢٥}{١٦٣٨٤ س^{٢٧}}$$

$$\frac{د^{١٥} س}{د ص^{١٥}} = \frac{٣٢٠٥١٠٠٠٠}{٣٢٧٦٨ س^{٢٩}}$$

$$\frac{د^{١٦} س}{د ص^{١٦}} = -\frac{٥١٢٨١٦٠٠٠}{٦٥٥٣٦ س^{٣١}}$$

$$\frac{د^{١٧} س}{د ص^{١٧}} = \frac{٨٢٠٩٨٥٦٠٠}{١٣١٠٧٢ س^{٣٣}}$$

$$\frac{د^{١٨} س}{د ص^{١٨}} = -\frac{١٣١٣٧٦٩٦٠٠}{٢٦٢١٤٤ س^{٣٥}}$$

$$\frac{د^{١٩} س}{د ص^{١٩}} = \frac{٢١٠٢٠٣٣٦٠٠}{٥٢٤٢٨٨ س^{٣٧}}$$

$$\frac{د^{٢٠} س}{د ص^{٢٠}} = -\frac{٣٣٦٣٢٥٣٧٦٠٠}{١٠٤٨٥٧٦ س^{٣٩}}$$

$$\frac{د^{٢١} س}{د ص^{٢١}} = \frac{٥٣٨١٨٠٦٠٢٥٠٠}{٢٠٩٧١٥٢ س^{٤١}}$$

$$\frac{د^{٢٢} س}{د ص^{٢٢}} = -\frac{٨٦١٠٨٩٦٠٤٠٠}{٤١٩٤٣٠٤ س^{٤٣}}$$

$$\frac{د^{٢٣} س}{د ص^{٢٣}} = \frac{١٣٧٧٤٣٣٦٠٦٤٠٠}{٨٣٨٨٦٠٨ س^{٤٥}}$$

$$\frac{د^{٢٤} س}{د ص^{٢٤}} = -\frac{٢٢٠٣٨٩٣٧٠٢٤٠٠}{١٦٧٧٢١٦ س^{٤٧}}$$

$$\frac{د^{٢٥} س}{د ص^{٢٥}} = \frac{٣٥٢٦٢٣٠٠٣٨٤٠٠}{٣٣٥٤٤٣٢ س^{٤٩}}$$

الحل: (٧) نفرض أن $ص = س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٣$

$$\frac{د ص}{د س} = ٣ س^{٢} + ٦ س \neq ٠ \text{ عند } س = ٠$$

$$\frac{د س}{د ص} = \frac{١}{٣ س^{٢} + ٦ س}$$

$$\frac{د^{٢} س}{د ص^{٢}} = -\frac{٦ س + ٦}{(٣ س^{٢} + ٦ س)^{٣}}$$

$$= -\frac{٦ (س + ١)}{٢٧ س^{٣} (س + ٢)^{٣}}$$

$$= -\frac{٢ (س + ١)}{٩ س^{٣} (س + ٢)^{٣}}$$

$$\frac{د^{٣} س}{د ص^{٣}} = \frac{٢ (٣ س^{٢} + ٦ س + ١)}{٩ س^{٥} (س + ٢)^{٥}}$$

$$\frac{د^{٤} س}{د ص^{٤}} = -\frac{٢ (١٥ س^{٣} + ٣٠ س^{٢} + ٢٠ س + ٤)}{٨١ س^{٧} (س + ٢)^{٧}}$$

$$\frac{د^{٥} س}{د ص^{٥}} = \frac{٢ (٣٥ س^{٤} + ١٠٥ س^{٣} + ١٢٠ س^{٢} + ٦٠ س + ١٢)}{٨١ س^{٩} (س + ٢)^{٩}}$$

$$\frac{د^{٦} س}{د ص^{٦}} = -\frac{٢ (٦٣ س^{٥} + ٢٧٠ س^{٤} + ٤٢٠ س^{٣} + ٣٠٠ س^{٢} + ٩٠ س + ٨)}{٧٢٩ س^{١١} (س + ٢)^{١١}}$$

$$\frac{د^{٧} س}{د ص^{٧}} = \frac{٤٠٠ (س + ١)^{٤}}{٢١٨٧ س^{١٠} (س + ٢)^{١٠}}$$

$$\therefore (ص \circ ع)(س) = \frac{-٤ س}{(٣ س^{٢} - ٨)}$$

الحل: (٤) نفرض أن $ع(س) = س^{٢} + ٥$ ، $ص(س) = ٣ س^{٣} + ٢ س - ١$

ولإيجاد $(ص \circ ع)(س)$ في أبسط صورة نوجد $(ص \circ ع)(١)$

$$\therefore (ص \circ ع)(س) = ص[ع(س)] = ص[س^{٢} + ٥]$$

$$= ٣ (س^{٢} + ٥)^{٣} + ٢ (س^{٢} + ٥) - ١$$

$$= ٣ (س^{٦} + ١٥ س^{٤} + ٧٥ س^{٢} + ١٢٥) + ٢ س^{٢} + ١٠ - ١$$

$$\therefore (ص \circ ع)(س) = ٣ س^{٦} + ٤٥ س^{٤} + ٢٢٧ س^{٢} + ٣٧٤$$

$$\therefore (ص \circ ع)(١) = ٣ \times ١ + ٤٥ \times ١ + ٢٢٧ \times ١ + ٣٧٤ = ٦٤٩$$

مثال : إذا كان $ص = و(ع)$ ، $ع = ق(ك)$ فجد :

$$\frac{د ص}{د ك} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د ك}$$

$$= \frac{د ص}{د ك} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د ك}$$

الحل (١) إذا وضع $ع = ٣ك - ٤$ ،

$$\frac{د ص}{د ع} = ٢ك + ٥ \text{ إذن } \frac{د ص}{د ك} = ٢$$

$$ك = ١ ، ٣ \Rightarrow ع = ٣ك - ٤ = ٣ ، ١ - ٤ = ٠ ، ٥$$

$$\frac{د ص}{د ع} = ٢ك + ٥ = ٢ ، ١ + ٥ = ٧ ، ٥$$

$$ك = ١ ، ٣ \Rightarrow \frac{د ص}{د ع} = ٢ك + ٥ = ٢ ، ١ + ٥ = ٧ ، ٥$$

الحل (٢) إذا وضع $ع = ٣ك + ٤$ ،

$$\frac{د ص}{د ك} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د ك}$$

$$= ٠ ، ١ (\frac{ع}{٢}) \times \frac{ع^{٢}}{٢}$$

$$\frac{د ص}{د ع} = \frac{ع^{٢}}{٢} \quad ، ك \neq ٠$$

ملاحظة : يمكن إيجاد $\frac{د ص}{د ك}$ من العلاقة $ص = ٠ ، ١ ع^{٢}$ مباشرة :

$$ص = ٠ ، ١ (٣ك + ٤)^{٢} = ٠ ، ١ (٩ك^{٢} + ٢٤ك + ١٦)$$

$$= ٠ ، ٩ ك^{٢} + ٢ ، ٤ ك + ١ ، ٦$$

$$\frac{د ص}{د ك} = ٢ ، ٧ ك + ٢ ، ٤$$

$$ك = ١ ، ٣ \Rightarrow \frac{د ص}{د ك} = ٢ ، ٧ ك + ٢ ، ٤ = ٢ ، ٧ ، ٣ + ٢ ، ٤ = ٠ ، ٧$$

$$\frac{\text{ق ص}}{\text{ق ن}} = \frac{\text{ق ص}}{\text{ق ع}} \div \frac{\text{ق ن}}{\text{ق ع}} = \frac{٦ ن^{٢} - ٦ ن}{٢ ن^{٢} - ن^{-٢}}$$

تمرين ٢ - ٣٠

(١) إذا كان $ص = ٢ س^{٣} - س$ ، $س = ن^{٢} + ٢$ فأوجد $\frac{\text{ق ص}}{\text{ق ن}}$

(٢) أوجد معادلة المماس للمنحنى $ص = س^{٢} + ٤$ ، $س = ٣ - ٥ ن$ عند النقطة التي عليها $ن = ٢$

(٣) إذا كان $ص = ٢ ن^{٣} - ٣ ن^{٢} + ٧$ ، $س = ن^{٢} + ٤ ن$ فأوجد $\frac{\text{ق ص}}{\text{ق س}}$ عندما $ن = ١$

الحل

(١) $ص = ٢ س^{٣} - س$

$\therefore \frac{\text{ق ص}}{\text{ق س}} = ٦ س^{٢} - ١$

$\frac{\text{ق ص}}{\text{ق ن}} = ٦ ن^{٢} - ٦ ن$ ، $\frac{\text{ق س}}{\text{ق ن}} = ٢ ن + ٤$

$\frac{\text{ق ص}}{\text{ق ن}} \div \frac{\text{ق س}}{\text{ق ن}} = \frac{\text{ق ص}}{\text{ق س}}$

$\frac{\text{ق ص}}{\text{ق س}} = \frac{٦ ن^{٢} - ٦ ن}{٢ ن + ٤}$

عندما $ن = ١$ فإن $\frac{\text{ق ص}}{\text{ق س}} = \frac{٦ - ٦}{٢ + ٤} = ٠$

(٢) $ص = ٣ - ٥ ن$ ، $س = ن^{٢} + ٢$

$\therefore \frac{\text{ق ص}}{\text{ق ن}} = -٥$ ، $\frac{\text{ق س}}{\text{ق ن}} = ٢ ن$

$\therefore \frac{\text{ق ص}}{\text{ق س}} = \frac{-٥}{٢ ن}$

عندما $ن = ٢$ فإن $\frac{\text{ق ص}}{\text{ق س}} = -\frac{٥}{٤}$

$ن = ٢$ ، $س = ٦$ ، $ص = -٧$

معادلة المماس هي $ص + ٧ = -\frac{٥}{٤}(س - ٦)$

$٤ ص + ٥ س + ٣ = ٠$

(٣) $ص = ٢ ن^{٣} - ٣ ن^{٢} + ٧$

$\frac{\text{ق ص}}{\text{ق ن}} = ٦ ن^{٢} - ٦ ن$

$س = ن^{٢} + ٤ ن$

$\frac{\text{ق س}}{\text{ق ن}} = ٢ ن + ٤$

$\frac{\text{ق ص}}{\text{ق س}} = \frac{٦ ن^{٢} - ٦ ن}{٢ ن + ٤}$

عندما $ن = ١$ فإن $\frac{\text{ق ص}}{\text{ق س}} = \frac{٦ - ٦}{٢ + ٤} = ٠$

ملاحظة

إذا كان $ص = ٢ س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٧$ ، فأوجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة التي عليها $س = ٢$

الحل

$ص = ٢ س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٧$

$\frac{\text{ق ص}}{\text{ق س}} = ٦ س^{٢} - ٦ س$

عندما $س = ٢$ فإن $\frac{\text{ق ص}}{\text{ق س}} = ٢٤ - ١٢ = ١٢$

$س = ٢$ ، $ص = ١١$

معادلة المماس هي $ص - ١١ = ١٢(س - ٢)$

$ص - ١٢ س + ١٣ = ٠$

$$٣\,ص\,س + ٤\,س^{٢} = ١٠$$

الحالة (٨) إذا كان $\frac{ص}{س}$ يمكن كتابته على الصورة

$$\frac{ص}{س} = \frac{ص^{٢} + ٤}{٣\,ص}$$

أى أن $ص = ٣\,ص^{٢} + ٤\,س$

وبفرض أن $ص = ع\,س$ حيث ع ثابت غير الصفر.

$$ص = ٣\,ع\,س^{٢} + ٤\,س$$

$$ص = س\,(٣\,ع\,س + ٤)$$

وهذه المعادلة تمثل عائلة من المنحنيات كل منها يمر بنقطة الأصل.

ولإيجاد ميل المماس لأحد هذه المنحنيات عند نقطة معلومة نعوض عن إحداثيات النقطة فى $\frac{ص}{س}$ لإيجاد قيمة ع ثم نعوض عن قيمة ع فى معادلة العائلة.

٣ . ٣ معادلة المماس

$$\frac{ص}{س} = ٢٣^{\frac{١}{٢}} \quad \frac{ص}{س} + ٧$$

(٥) إذا مر مماس $ص = ع_{١}\,س - ٣ع$ ، $ع = ٤$ بنقطة $ق$:

$$\frac{ص}{س} = ٦\,ع_{١}\,(ع + ٢)^{٢}\,(ع + ١)$$

$ق = ع(ع+٢)$ بنقطة $ق$:

(٤) إذا مر $ص = ٣\,س + ٤$

بنقطة $ق$ فإن $ق$ تحقق المعادلة $ص = ق(ع)$ إذا كان :

$$٣\,ع\,س + ٤\,س^{٢} = ١٠$$

مثال: $\because \quad ص^{2} + 2س^{2} = 36$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{-4س}{2ص} = -\frac{2س}{ص}$$

$$\frac{د^{2} ص}{د س^{2}} = -\frac{د}{د س}\left(\frac{2س}{ص}\right) = -\frac{ص \cdot 2 - 2س \cdot \frac{د ص}{د س}}{ص^{2}}$$

$$= -\frac{2ص - 2س \cdot \left(-\frac{2س}{ص}\right)}{ص^{2}} = -\frac{2ص^{2} + 4س^{2}}{ص^{3}}$$

$$= -\frac{2(ص^{2} + 2س^{2})}{ص^{3}} = -\frac{2 \times 36}{ص^{3}} = -\frac{72}{ص^{3}}$$

مثال: $\because \quad ص^{2} = 4س$

$$2ص \frac{د ص}{د س} = 4 \Rightarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{2}{ص}$$

$$\frac{د^{2} ص}{د س^{2}} = \frac{د}{د س}\left(\frac{2}{ص}\right) = \frac{ص \cdot 0 - 2 \cdot \frac{د ص}{د س}}{ص^{2}}$$

$$= \frac{-2 \cdot \frac{2}{ص}}{ص^{2}} = -\frac{4}{ص^{3}}$$

تمرين (٩): إذا كان $ص^{2} + 2س^{2} = 36$ فأثبت أن $\frac{د^{2} ص}{د س^{2}} = -\frac{72}{ص^{3}}$

مثال: $\because \quad ص^{2} + 2س^{2} = 36$

$$2ص \frac{د ص}{د س} + 4س = 0 \Rightarrow \frac{د ص}{د س} = -\frac{2س}{ص}$$

$$\frac{د^{2} ص}{د س^{2}} = \frac{د}{د س}\left(-\frac{2س}{ص}\right) = -\frac{ص \cdot 2 - 2س \cdot \frac{د ص}{د س}}{ص^{2}}$$

$$= -\frac{2ص - 2س \cdot \left(-\frac{2س}{ص}\right)}{ص^{2}} = -\frac{2ص^{2} + 4س^{2}}{ص^{3}}$$

$$= -\frac{2(ص^{2} + 2س^{2})}{ص^{3}} = -\frac{2 \times 36}{ص^{3}} = -\frac{72}{ص^{3}}$$

تمرين (١٠): إذا كان $ص^{2} = 4س$ فأثبت أن $\frac{د^{2} ص}{د س^{2}} = -\frac{4}{ص^{3}}$

مثال: $\because \quad ص^{2} = 4س$

$$2ص \frac{د ص}{د س} = 4 \Rightarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{2}{ص}$$

$$\frac{د^{2} ص}{د س^{2}} = \frac{د}{د س}\left(\frac{2}{ص}\right) = \frac{ص \cdot 0 - 2 \cdot \frac{د ص}{د س}}{ص^{2}}$$

$$= \frac{-2 \cdot \frac{2}{ص}}{ص^{2}} = -\frac{4}{ص^{3}}$$

تمرين (١١): إذا كان $ص^{2} = 4س$ فأثبت أن $\frac{د^{2} ص}{د س^{2}} = -\frac{4}{ص^{3}}$

مثال: $\because \quad ص^{2} + 2س^{2} = 36$

$$2ص \frac{د ص}{د س} + 4س = 0 \Rightarrow \frac{د ص}{د س} = -\frac{2س}{ص}$$

$$\frac{د^{2} ص}{د س^{2}} = \frac{د}{د س}\left(-\frac{2س}{ص}\right) = -\frac{ص \cdot 2 - 2س \cdot \frac{د ص}{د س}}{ص^{2}}$$

$$= -\frac{2ص - 2س \cdot \left(-\frac{2س}{ص}\right)}{ص^{2}} = -\frac{2ص^{2} + 4س^{2}}{ص^{3}}$$

$$= -\frac{2(ص^{2} + 2س^{2})}{ص^{3}} = -\frac{2 \times 36}{ص^{3}} = -\frac{72}{ص^{3}}$$

تمرين (١٢): إذا كان $ص^{2} = 4س$ فأثبت أن $\frac{د^{2} ص}{د س^{2}} = -\frac{4}{ص^{3}}$

مثال: $\because \quad ص^{2} + 2س^{2} = 36$

$$2ص \frac{د ص}{د س} + 4س = 0 \Rightarrow \frac{د ص}{د س} = -\frac{2س}{ص}$$

$$\frac{د^{2} ص}{د س^{2}} = \frac{د}{د س}\left(-\frac{2س}{ص}\right) = -\frac{ص \cdot 2 - 2س \cdot \frac{د ص}{د س}}{ص^{2}}$$

$$= -\frac{2ص - 2س \cdot \left(-\frac{2س}{ص}\right)}{ص^{2}} = -\frac{2ص^{2} + 4س^{2}}{ص^{3}}$$

$$= -\frac{2(ص^{2} + 2س^{2})}{ص^{3}} = -\frac{2 \times 36}{ص^{3}} = -\frac{72}{ص^{3}}$$

معادلة دليل المماس:

$$\frac{1-س}{1} = \frac{ص+2}{-8} \Rightarrow -ص-2 = 8س-8$$

$$\therefore \quad 8س + ص - 6 = 0 \quad \text{معادلة المماس}$$

معادلة دليل العمودي:

$$\frac{ص-1}{1} = \frac{س-2}{-8} \Rightarrow 8ص - 8 = س - 2$$

$$\therefore \quad س - 8ص + 6 = 0 \quad \text{معادلة العمودي}$$

مثال أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي لمنحنى الدائرة $س^2 + ص^2 = 17$ عند النقطة $(-4, 1)$

الحل

$$\because \quad (-4)^2 + (1)^2 = 16 + 1 = 17 \quad \text{فالنقطة تقع على الدائرة}$$

$$\therefore \quad \text{النقطة } (-4, 1) \text{ تقع على منحنى الدائرة}$$

طريقة (١) بتفاضل معادلة الدائرة $س^2 + ص^2 = 17$ ضمنياً بالنسبة لـ س

$$2س + 2ص \frac{د ص}{د س} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{د ص}{د س} = \frac{-2س}{2ص} = \frac{-س}{ص}$$

$$\therefore \quad \text{ميل المماس عند النقطة } (-4, 1) = \frac{-(-4)}{1} = 4$$

$$\therefore \quad \text{ميل العمودي} = \frac{-1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \text{معادلة العمودي هي } ص - 1 = -\frac{1}{4}(س + 4)$$

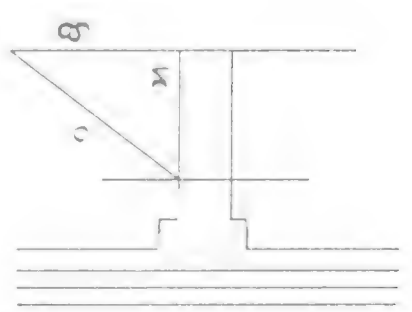
$$\Rightarrow \quad 4ص - 4 = -س - 4$$

$$\therefore \quad س + 4ص = 0 \quad \text{معادلة العمودي}$$

$$\text{معادلة المماس هي } ص - 1 = 4(س + 4)$$

$$\Rightarrow \quad ص - 1 = 4س + 16$$

$$\therefore \quad 4س - ص + 17 = 0 \quad \text{معادلة المماس}$$



مثال (٢٠١٠) :

أوجد معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة (٣ ، ١ ، ٢) ويوازي المستويين $س + ٢ص + ٣ع = ٥$ ، $٢س + ص + ٣ع = ٤$

الحل :

نفرض أن المستوى المطلوب هو $ل$

(١) $\vec{ن}_{ل} = \vec{ن}_{١} \times \vec{ن}_{٢}$

(٢) $\vec{ن}_{ل}$ عمودي على $\vec{ل}$ حيث $\vec{ل}$ متجه اتجاه المستقيم

(٣) معادلة المستوى المار بنقطة معلومة ومتجه عمودي معلوم

(٤) نعوض في (٣) بالنقطة المعلومة ومتجه العمودي

(٥) نختصر المعادلة

(٦) نكتب المعادلة في الصورة العامة

(٧) نوجد البعد بين نقطة ومستوى

(٨) نوجد المسقط العمودي لنقطة على مستوى

(٩) نوجد صورة نقطة بالنسبة لمستوى

(١٠) نوجد المسقط العمودي لمستقيم على مستوى

(١١) نوجد صورة مستقيم بالنسبة لمستوى

(١٢) نوجد المسقط العمودي لمستقيم على مستقيم

(١٣) نوجد صورة مستقيم بالنسبة لمستقيم

(١٤) نوجد البعد بين مستقيمين متنافرين

(١٥) نوجد البعد بين مستقيمين متوازيين

(١٦) نوجد البعد بين مستقيمين متقاطعين

(١٧) نوجد البعد بين مستقيم ومستوى يوازيه

(١٨) نوجد البعد بين مستويين متوازيين

(١٩) نوجد البعد بين مستقيمين متخالفين

(٢٠) نوجد البعد بين مستقيمين متقاطعين

(٢١) نوجد البعد بين مستقيم ومستوى يقطعه

(٢٢) نوجد البعد بين مستويين متقاطعين

(٢٣) نوجد قياس الزاوية بين مستقيمين متقاطعين

(٢٤) نوجد قياس الزاوية بين مستقيمين متخالفين

(٢٥) نوجد قياس الزاوية بين مستقيم ومستوى يقطعه

(٢٦) نوجد قياس الزاوية بين مستويين متقاطعين

(٢٧) نوجد قياس الزاوية بين مستقيم ومستوى يوازيه

(٢٨) نوجد قياس الزاوية بين مستويين متوازيين

(٢٩) نوجد قياس الزاوية بين مستقيمين متوازيين

(٣٠) نوجد قياس الزاوية بين مستقيم ومستوى يحتويه

(٣١) نوجد قياس الزاوية بين مستويين متطابقين

(٣٢) نوجد قياس الزاوية بين مستقيمين متطابقين

(٣٣) نوجد قياس الزاوية بين مستقيم ومستوى يطابقه

(٣٤) نوجد قياس الزاوية بين مستويين متطابقين

(٣٥) نوجد قياس الزاوية بين مستقيمين متطابقين

(٣٦) نوجد قياس الزاوية بين مستقيم ومستوى يطابقه

(٣٧) نوجد قياس الزاوية بين مستويين متطابقين

(٣٨) نوجد قياس الزاوية بين مستقيمين متطابقين

(٣٩) نوجد قياس الزاوية بين مستقيم ومستوى يطابقه

(٢) يتجه $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع ن}}$ للاستقامة جيدًا :

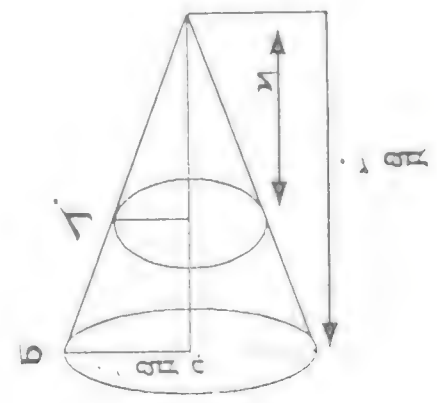
(١) يتجه معدل تغير الحجم $= ٢٢ \text{ سم}^٣/\text{ث}$ عندما $\text{ن} = ٦ + ١٢ = ١٨$ سم.

جـ ٣ ـ ٣ جوجل

معـ /ذ هي معدل تغير

$$\frac{\text{ع ص}}{\text{ع ن}} = \frac{٤}{٣\pi ٤٥} \Rightarrow \frac{\text{ع ص}}{\text{ع ١}} \times \frac{\text{ع ١}}{\text{ع ن}} = \pi (١٥)^٢ \times \frac{١}{٤} = ٥$$

جيث إن نصف



$$\frac{\text{ع ص}}{\text{ع ن}} = \frac{١٢}{١} \pi \times \text{ن}^٢ \times \frac{\text{ع ن}}{\text{ع ١}} \Rightarrow$$

$$\text{ن} = \frac{٤}{١} \pi \times \frac{٣}{١٢} = \text{ن}^٢ \times \text{ن} = \frac{١٢}{١} \pi \text{ن}^٣$$

ومنها نجد أن (١) تكافئ :

$$\frac{\text{ص}}{١٠} = \frac{٢٠}{\text{ن}} \Rightarrow \text{ص} = \frac{٢}{١} \text{ن}$$

في جميع حالاتها ، ل د ل ، ل ج ق تكافئ :

$$\therefore \text{ن} = \frac{٣}{١} \pi \text{ص}^٢ \text{ن} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

جـ(ق ص) = ص مضروبة في ن = ن

سوف نبدأ في حل هذا السؤال ، نجد أن ولايات جميع حالاتها إما

حذف

فمنها في نيران ١٥ سم.

مضروبة ٣٠ سم ، نجد أن نصف الحجم تتزايد بمعدل ٥ سم^٣/ث ، فإن ولايات جزئيات نجد ١٠ سم

ثبت في أن نيران معدل تزايد نصف قطر القاعدة مضروب الحجم تتناقص

إجابة (٢١)

جزيئة و فور تحت لكيلة جزيئة هـ حبح وتتا ، .

أ : (٠ ، ٢) ، (٤ ، − ٢)

(٥) هاونة سوجتة وطبق وحبة ثقوبة حكيلة ٥٠٠ هت ثق أحد

جقعت ملاحة أهتاهة تحت أ ٠٫٢٢ ط هت ، إذحب هيلة جتوسلة

جقلاة جطاحة جأحد أحبح ونقوبة فوت ٥ هت.

أ : − ٠٫٤ ؛ هت/ث

(٦) تلفة لوجدة هلاة حفوق لوم ديلة ثجز هيم فوق . إ. هيلة

جحيثة جقلاة جطاحة $\frac{٢٢}{٧}$ هت ث أحد جبلية للا إهتحهم لوجدة

ولحم جفوز قلاة طاحة ١٠ هت . إذحب

(أ) هيلة جحيثة لو ملاحة

(ب) هيلة جحيثة لو رابسوة جبابس.

أ ٠٠٫٤ هت/ث ، ٨٠ هت/ث

مسألة محلولة ٣ - ٤ - ١

بفرض أن θ هي قيمة حقيقية مجهولة ولكنها ثابتة وليست عشوائية. نفرض أن θ يمكن أن تأخذ أي قيمة على خط الأعداد. إذن

دالة الكثافة المشتركة لعينة عشوائية حجمها n هي:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \cdots f(x_n, \theta) = \frac{e^{-n\theta} \theta^{\sum x_i}}{\prod x_i!}$$

$$\ln g = -n\theta + \sum x_i \ln \theta - \ln \prod x_i!$$

$$\frac{\partial \ln g}{\partial \theta} = -n + \frac{\sum x_i}{\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\frac{\partial^2 \ln g}{\partial \theta^2} = -\frac{\sum x_i}{\theta^2} < 0$$

إذن $\hat{\theta} = \bar{x}$ هي مقدر الإمكان الأعظم لـ θ.

مسألة محلولة ٣ - ٤ - ٢

إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عينة عشوائية من توزيع بواسون بمتوسط θ فأوجد مقدر الإمكان الأعظم لـ θ.

الحل

$$f(x, \theta) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \frac{e^{-n\theta} \theta^{\sum x_i}}{\prod x_i!}$$

$$\ln g = -n\theta + \sum x_i \ln \theta - \ln \prod x_i!$$

$$\frac{\partial \ln g}{\partial \theta} = -n + \frac{\sum x_i}{\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\frac{\partial^2 \ln g}{\partial \theta^2} = -\frac{\sum x_i}{\theta^2} < 0$$

إذن $\hat{\theta} = \bar{x}$ هي مقدر الإمكان الأعظم لـ θ.

مسألة محلولة ٣ - ٤ - ٣

إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عينة عشوائية من توزيع ذي الحدين بمتوسط np حيث n معلومة و p مجهولة، أوجد مقدر الإمكان الأعظم لـ p.

الحل

$$f(x, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n; p) = \prod \binom{n}{x_i} p^{\sum x_i} (1-p)^{n^2 - \sum x_i}$$

$$\ln g = \text{ثابت} + \sum x_i \ln p + (n^2 - \sum x_i) \ln (1-p)$$

$$\frac{\partial \ln g}{\partial p} = \frac{\sum x_i}{p} - \frac{n^2 - \sum x_i}{1-p} = 0$$

$$\frac{\sum x_i}{p} = \frac{n^2 - \sum x_i}{1-p}$$

$$\sum x_i - p \sum x_i = n^2 p - p \sum x_i$$

$$\hat{p} = \frac{\sum x_i}{n^2} = \frac{n\bar{x}}{n^2} = \frac{\bar{x}}{n}$$

$$\frac{\partial^2 \ln g}{\partial p^2} = -\frac{\sum x_i}{p^2} - \frac{n^2 - \sum x_i}{(1-p)^2} < 0$$

إذن $\hat{p} = \frac{\bar{x}}{n}$ هي مقدر الإمكان الأعظم لـ p.

مسألة محلولة ٣ - ٤ - ٤

إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عينة عشوائية من توزيع ذي الحدين السالب بمتوسط $\frac{n^2(1-p)}{p}$ حيث n معلومة و p مجهولة، أوجد مقدر الإمكان الأعظم لـ p.

الحل

$$f(x, p) = \binom{x + n^2 - 1}{x} p^{n^2} (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n; p) = \prod \binom{x_i + n^2 - 1}{x_i} p^{n^2 n} (1-p)^{\sum x_i}$$

$$\ln g = \text{ثابت} + n^2 n \ln p + \sum x_i \ln (1-p)$$

$$\frac{\partial \ln g}{\partial p} = \frac{n^2 n}{p} - \frac{\sum x_i}{1-p} = 0$$

$$\frac{n^2 n}{p} = \frac{\sum x_i}{1-p}$$

$$n^2 n - p n^2 n = p \sum x_i$$

$$\hat{p} = \frac{n^2 n}{n^2 n + \sum x_i} = \frac{n^2}{n^2 + \bar{x}}$$

$$\frac{\partial^2 \ln g}{\partial p^2} = -\frac{n^2 n}{p^2} - \frac{\sum x_i}{(1-p)^2} < 0$$

إذن $\hat{p} = \frac{n^2}{n^2 + \bar{x}}$ هي مقدر الإمكان الأعظم لـ p.

مسألة محلولة ٣ - ٤ - ٥

إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عينة عشوائية من توزيع ذي الحدين بمتوسط np حيث p معلومة و n مجهولة، أوجد مقدر الإمكان الأعظم لـ n.

الحل

$$f(x, n) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n; n) = \prod \binom{n}{x_i} p^{\sum x_i} (1-p)^{n^2 - \sum x_i}$$

$$\ln g = \text{ثابت} + \sum \ln \binom{n}{x_i} + \sum x_i \ln p + (n^2 - \sum x_i) \ln (1-p)$$

$$\frac{\partial \ln g}{\partial n} = \sum \frac{\partial \ln \binom{n}{x_i}}{\partial n} + n^2 \ln (1-p)$$

$$\frac{\partial \ln g}{\partial n} = \sum \frac{\partial \ln \frac{n!}{x_i!(n-x_i)!}}{\partial n} + n^2 \ln (1-p)$$

$$\frac{\partial \ln g}{\partial n} = \sum \frac{\partial \ln n!}{\partial n} - \sum \frac{\partial \ln (n-x_i)!}{\partial n} + n^2 \ln (1-p)$$

$$\frac{\partial \ln g}{\partial n} = \sum \psi(n+1) - \sum \psi(n-x_i+1) + n^2 \ln (1-p)$$

$$\frac{\partial \ln g}{\partial n} = n\psi(n+1) - \sum \psi(n-x_i+1) + n^2 \ln (1-p)$$

$$\frac{\partial^2 \ln g}{\partial n^2} = n\psi'(n+1) - \sum \psi'(n-x_i+1) < 0$$

حيث ψ هي دالة جاما المتعددة وهي دالة متزايدة إذن $\hat{n}$ هي أكبر قيمة صحيحة لـ n تحقق المتباينة:

$$n\psi(n+1) - \sum \psi(n-x_i+1) + n^2 \ln (1-p) \geq 0$$

مسألة محلولة ٣ - ٤ - ٦

إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عينة عشوائية من توزيع ذي الحدين السالب بمتوسط $\frac{n^2(1-p)}{p}$ حيث p معلومة و n مجهولة، أوجد مقدر الإمكان الأعظم لـ n.

الحل

$$f(x, n) = \binom{x + n^2 - 1}{x} p^{n^2} (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n; n) = \prod \binom{x_i + n^2 - 1}{x_i} p^{n^2 n} (1-p)^{\sum x_i}$$

$$\ln g = \text{ثابت} + \sum \ln \binom{x_i + n^2 - 1}{x_i} + n^2 n \ln p + \sum x_i \ln (1-p)$$

$$\frac{\partial \ln g}{\partial n} = \sum \frac{\partial \ln \binom{x_i + n^2 - 1}{x_i}}{\partial n} + n^2 \ln p$$

$$\frac{\partial \ln g}{\partial n} = \sum \frac{\partial \ln \frac{(x_i + n^2 - 1)!}{x_i!(n^2 - 1)!}}{\partial n} + n^2 \ln p$$

$$\frac{\partial \ln g}{\partial n} = \sum \frac{\partial \ln (x_i + n^2 - 1)!}{\partial n} - \sum \frac{\partial \ln (n^2 - 1)!}{\partial n} + n^2 \ln p$$

$$\frac{\partial \ln g}{\partial n} = \sum \psi(x_i + n^2) - \sum \psi(n^2) + n^2 \ln p$$

$$\frac{\partial \ln g}{\partial n} = \sum \psi(x_i + n^2) - n\psi(n^2) + n^2 \ln p$$

$$\frac{\partial^2 \ln g}{\partial n^2} = \sum \psi'(x_i + n^2) - n\psi'(n^2) < 0$$

حيث ψ هي دالة جاما المتعددة وهي دالة متزايدة إذن $\hat{n}$ هي أكبر قيمة صحيحة لـ n تحقق المتباينة:

$$\sum \psi(x_i + n^2) - n\psi(n^2) + n^2 \ln p \geq 0$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$$

مسألة (٢-١)

$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ حيث θ تقاس بالتقدير الدائري

البرهان

نفرض $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ ونرسم دائرة مركزها نقطة الأصل o.

نعين النقطة a على الدائرة بحيث $m\angle aob = \theta$ راديان.

نرسم $\overline{ab} \perp \overline{oc}$ ، $\overline{ad}$ مماس للدائرة عند a ويقطع $\overline{oc}$ في d.

نعين النقطة b على الدائرة بحيث b تقع في الربع الأول.

نرسم $\overline{bc} \perp \overline{oc}$ ، $c \in \overline{oc}$

من الواضح أن: مساحة $\triangle aoc <$ مساحة القطاع الدائري $aob <$ مساحة $\triangle aod$

مساحة $\triangle aoc = \frac{1}{2} \times oc \times ac = \frac{1}{2} \times \cos\theta \times \sin\theta$

مساحة القطاع الدائري $aob = \frac{1}{2} \times \theta$ حيث θ تقاس بالتقدير الدائري

مساحة $\triangle aod = \frac{1}{2} \times od \times ad = \frac{1}{2} \times 1 \times \tan\theta$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cos\theta \sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta$$

بضرب المتباينة في $\frac{2}{\sin\theta}$ حيث $\sin\theta$ موجبة لأن $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\cos\theta < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

بأخذ مقلوب المتباينة

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$$

عندما $\theta \to 0$ فإن $\cos\theta \to 1$

$$\therefore \frac{\sin\theta}{\theta} \to 1$$

$$\therefore \frac{\theta}{\sin\theta} \to 1 \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\theta} \to 1$$

مثال (١)

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 2\theta}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{2\sin 2\theta}{2\theta}$$

$$= 2 \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 2\theta}{2\theta}$$

$$= 2 \times 1 = 2$$

مثال (٢)

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan 3\theta}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 3\theta}{\theta \cos 3\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{3\sin 3\theta}{3\theta \cos 3\theta}$$

$$= 3 \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 3\theta}{3\theta} \times \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos 3\theta}$$

$$= 3 \times 1 \times \frac{1}{1} = 3$$

مثال (٣)

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 5\theta}{\sin 2\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\frac{\sin 5\theta}{\theta}}{\frac{\sin 2\theta}{\theta}}$$

$$= \frac{\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 5\theta}{5\theta} \times 5}{\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times 2}$$

$$= \frac{1 \times 5}{1 \times 2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{نهاية المقدار} = \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جتا } ٢س}{١} \quad (١)$$

إذا تعذر إيجاد النهاية لكن يمكن :

$$\text{نهاية المقدار} = \frac{\text{المقدار}}{\text{المقدار}} \times ١ =$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{س}{\text{جا } س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا } ٢س}{٢س}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{س}{\text{جا } س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{٢س(١+\text{جتا } ٢س)}{(١+\text{جتا } ٢س)\ ١-\text{جتا}^{٢} ٢س}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{س}{\text{جا } س} \times \frac{١+\text{جتا } ٢س}{١+\text{جتا } ٢س}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{س}{١-\text{جتا } ٢س}$$

أمثلة (للتدريب)

مثال (٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{١-\text{جتا } ٢س} = \text{نهاية المقدار}$

مثال (٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{٢س}{\text{جا } ٣س} = \frac{٢}{٣} \lim_{س \to ٠} \frac{٣س}{\text{جا } ٣س} = \frac{٢}{٣} \times ١ = \frac{٢}{٣}$

$= ٢ \times ١ \times ٢ =$

مثال (١٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{٢س}{\text{جا } ٢س} = ٢ \lim_{س \to ٠} \frac{س}{\text{جا } ٢س} = ١$

مثال (١٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا } س}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا } س}{\frac{س}{١}} = \frac{١}{١} = ١$

$$\text{حيث جا} ٠ = ٠ \quad \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا } ٢س}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا } ٢س}{٢س} \times ٢ = ١ \times ٢ = ٢$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \times 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \times 3x}{\frac{\sin 2x}{2x} \times 2x} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x \sin 2x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \times 3x \times \frac{\sin 2x}{2x} \times 2x}{x^2} = 6$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cos 2x \sin x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-2 \sin^2 x}{x^2} = -2$$

مثال (١٧)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 1 \quad (٢)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 2x} \quad (٣)$$

أوجد كلاً من النهايات الآتية :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} \quad (١)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 4x} \quad (٢)$$

$$\lim_{x \to 0} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \quad (٣)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \quad (٤)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} \quad (٥)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} \quad (٦)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x \sin 2x}{x^2} \quad (٧)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{x} \quad (٨)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2} \quad (٩)$$

٣ـ٥ مشتقة دالة مركبة

مثال (٣ـ٢٠)

نص : مشتقة دالة د(س) = جتا س

أمسموذج (المثال)

لتكن ص = د(ع) ، ع = هـ(س) دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة لكل من ع ، س على الترتيب فإن :

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{س}}$$

$$\text{د}'(\text{س}) = \lim_{\Delta \text{س} \to 0} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$$

$$= \lim_{\Delta \text{س} \to 0} \frac{\text{د}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta \text{س}}$$

$$= \lim_{\Delta \text{س} \to 0} \frac{\text{جتا}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{جتا}(\text{س})}{\Delta \text{س}}$$

$$= \lim_{\Delta \text{س} \to 0} \frac{-٢ \text{جا}\left(\text{س} + \frac{\Delta \text{س}}{٢}\right) \text{جا}\left(\frac{\Delta \text{س}}{٢}\right)}{\Delta \text{س}}$$

$$= \lim_{\Delta \text{س} \to 0} -\text{جا}\left(\text{س} + \frac{\Delta \text{س}}{٢}\right) \times \lim_{\Delta \text{س} \to 0} \frac{\text{جا}\left(\frac{\Delta \text{س}}{٢}\right)}{\frac{\Delta \text{س}}{٢}}$$

$$= -\text{جا}(\text{س}) \times ١$$

$$= -\text{جا}(\text{س})$$

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{ع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{س}}$$

$$= -\text{جا}(\text{ع}) \times ٢\text{س}$$

$$= -\text{جا}(\text{س}^٢) \times ٢\text{س}$$

$$= -٢\text{س} \text{ جا}(\text{س}^٢)$$

مثال (٣ـ٢١)

أوجد $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ إذا كان :

(١) ص = (٣س + ٢)^٥

(٢) ص = جا(٣س^٢ + ٥س)

(٣) ص = جتا(٢س^٣ + ٥)

(٤) ص = ظا(٣س^٢ + ٥س)

(٥) ص = ظتا(٣س^٢ + ٥س)

(٦) ص = قا(٣س^٢ + ٥س)

(٧) ص = قتا(٣س^٢ + ٥س)

(٨) ص = هـ^(٣س^٢ + ٥س)

(٩) ص = لو(٣س^٢ + ٥س)

(١٠) ص = $\sqrt{٣س^٢ + ٥س}$

(١١) ص = $\frac{س^٢}{١ - ٣س^٢}$

$$\frac{\dot{c}\,\omega}{\dot{c}\,[\,\tan\omega\,]} = \frac{\dot{c}\,\omega}{\dot{c}\,[\,\tan(\frac{\pi}{٢}-\omega)\,]}$$

مثال (٢٠٢٠)

أوجد $\frac{\dot{c}\,ص}{\dot{c}\,س}$ إذا كان $س = \tan ع$

الحل

$$\frac{\dot{c}\,ص}{\dot{c}\,س} = \frac{\dot{c}\,ص}{\dot{c}\,ع} \times \frac{\dot{c}\,ع}{\dot{c}\,س}$$

$$= \frac{\dot{c}\,ص}{\dot{c}\,ع} \times \frac{١}{\sec^{٢} ع}$$

$$= \frac{\dot{c}\,ص}{\dot{c}\,ع} \times \cos^{٢} ع$$

$$= \frac{\dot{c}\,ص}{\dot{c}\,ع} \times \frac{١}{٢}(١ + \cos ٢ع)

$$= \frac{\text{جتا}^{\prime} \text{ س}}{\text{ا}} \times \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$$

$$= \frac{\text{جتا}^{\prime} \text{ س}}{(\text{جتا}^{\prime} \text{ س} + \text{ا ظا}^{\prime} \text{ س}) \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}}$$

$$= \frac{(\text{جتا س})^{\prime}}{\text{جتا س} \times \text{جتا س} \times \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} - \text{ظا س} \times - \text{ظا س} \times \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د}}[\text{ظا س}] = \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\left[\frac{\text{جتا س}}{\text{جتا س}}\right]$$

ملاحظة (١٩)

$$\boxed{\frac{\text{د ص}}{\text{د}}(\text{ظا س}) = \text{قا}^{\prime} \text{ س} \times \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}}$$

مثال (٢٠ ـ ٣)

$$\text{ظا} \frac{\pi}{٣} = \text{جا}\left(\frac{\pi}{٣} - \text{ص}\right) = -\text{جتا ص}$$

بديل ٢ بطريقة (٢٠ ـ ٣)

$$\boxed{\frac{\text{د ص}}{\text{د}}(\text{جتا س}) = -\text{جا س} \times \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}}$$

ملاحظة (١٩)

$$\text{هـ}) \quad \frac{\text{د ص}}{\text{د}}[\text{جتا}(٣ - \text{ص}^{\prime})] = -\text{جا}(٣ - \text{ص}^{\prime}) \times (-٢\text{ص}) = ٢\text{ص جا}(٣ - \text{ص}^{\prime})$$

$$\text{د}) \quad \frac{\text{د ص}}{\text{د}}(\text{جتا}^{\prime} \text{ ص}) = ٢\text{جتا ص} \times (-\text{جا ص}) = -٢\text{ص جتا ص جا ص}$$

طريقة بديلة (٢٠ ـ ٤)

مسألة ذاتية ٧ ظا ك

(١٩)

$$\frac{d}{dx}(\sec^n x) = \sec^n x \tan x \cdot \frac{dy}{dx}$$

مثال ٢ جد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = \sec^7 x$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = 7\sec^6 x \times \sec x \tan x \times \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}(\csc^n x) = -n\csc^n x \cot x \cdot \frac{dy}{dx}$$

مثال ٣ جد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = \csc^4 x$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = -4\csc^3 x \times -\csc x \cot x \times \frac{dy}{dx}$$

$$= 4\csc^4 x \cot x \frac{dy}{dx}$$

مثال ٤ جد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = \cot^2 x$

الحل

$$\frac{dy}{dx}[\cot^2 x] = 2\cot x \times -\csc^2 x \times \frac{dy}{dx}$$

$$= -2\cot x \csc^2 x \frac{dy}{dx}$$

مثال ٥ جد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = \tan x \sec x$

الحل

$$\frac{dy}{dx}[\tan x \sec x] = \tan x \sec x \tan x + \sec x \sec^2 x$$

$$= \sec x \tan^2 x + \sec^3 x$$

$$= \sec x(\sec^2 x - 1) + \sec^3 x$$

$$= \sec^3 x - \sec x + \sec^3 x$$

$$= 2\sec^3 x - \sec x$$

مثال ٦ جد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-\sin x)(\cos x) - (1+\sin x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{\cos x - \cos x \sin x + \cos x + \cos x \sin x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{2}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= 2\sec x \cdot \frac{dy}{dx}$$

(٢٠)

$$= \text{[illegible]}$$

$$= \text{[illegible]}$$

$$= \text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]}$$

ت) $\frac{\text{ت ق}}{\text{ت}}$ ([illegible]) =

ب) $\frac{\text{ت ق}}{\text{ت}}$ (ق [illegible]) = ق× − [illegible] + [illegible] × ١ =− ق [illegible] + [illegible] ق

$$= \frac{\text{[illegible]}}{\text{ق} \times \text{[illegible]} \times \text{[illegible]}} = \text{ق [illegible]} \sqrt{\text{[illegible]}}$$

$$\frac{١}{٢} \left[\text{[illegible]} \right]^{\frac{٢}{-١}} \text{[illegible]} \times \text{[illegible]} \times ٢\text{ق}$$

د) $\frac{\text{ت ق}}{\text{ت ع}} \left[\sqrt{\text{[illegible]}} \right] =$

$$= ٢\text{ق [illegible]} \text{[illegible]}$$

ج) $\frac{\text{ت ق}}{\text{ت ع}} \left[\text{[illegible]} \right] = \text{[illegible]} \times \text{[illegible]} \times ٢\text{ق}$

[illegible] (٢١)

$$\frac{\text{ت ق}}{\text{ت}} (\text{[illegible]}) = - \text{[illegible]} \times \frac{\text{ت ق}}{\text{ت}}$$

[illegible] = [illegible]

[illegible] (٢٠ ـ ٧)

(٥) $\frac{د}{د س}(\text{جتا}^{٢} س) = (\text{جتا} س)(\text{جتا} س) = \text{جتا}^{٢} س - \text{جا}^{٢} س$

(٦) $\frac{د}{د س}\left(\frac{\text{ظا} ٢س - \text{ظا} ٢س}{١}\right) = \frac{(١ - \text{ظا}^{٢} س)^{٢}}{\text{جتا}^{٤} س}$

(٧) $\frac{د}{د س}\left(\frac{١ + \text{ظا}^{٢} س}{١ - \text{ظا}^{٢} س}\right) = \text{ظا} ٢س$

(٨) $\frac{د}{د س}\left(\sqrt{١ - \text{جا}^{٢} ٢س}\right) = \frac{-\text{جا} ٢س}{\sqrt{١ - \text{جا}^{٢} ٢س}}$

(٩) $\frac{د}{د س}\left(\frac{س}{١ + ٢س}\right) = \frac{١ + ٢س}{(١ + ٢س)^{٢}}$

مثال : إذا كان $ص = \text{جا}(٣ - س^{٢})$ فأوجد $\frac{د ص}{د س}$:

الحل

(١) $ص = \text{جا}(٣ - س^{٢})$

(٢) $ص = \text{جا} س$ ، $س > ٠$

(٣) $ص = \text{ظا} ٣س$

(٤) $ص = \text{ظا}^{٢} س$

(٥) $ص = \text{جا}^{٢}(٣ - س)$

(٦) $ص = \text{جا} ٢س - \frac{٣}{١}\text{جا}^{٣} ٢س$

(٧) $ص = \text{جا} ٢س \text{ جتا} ٤س$

(٨) $ص = س^{٢} \text{جا}^{٢} س$

(٩) $ص = \text{ظا}(٢س + ١)$

(١٠) $ص = \text{جا} س - س$

٣ـ٦ مُعادَلاتُ جِسْمِيلاتُ إلى مُتَغَيِّراتُ

مَجْمُوعَةُ قِيَمِ $y = \dot{c}(\omega)$ إذا كَتَبْناها إلى لِيالِ $\subset$ مَجْمُوعَةُ

لِسْتِلاءِ إلى ف . مِزْمِ جِيجِيلاً

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \dot{c}(\omega)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \dot{c}(\omega) \text{ لِمَّا } \Delta\omega \to 0$$

$$\text{وَإذا جَعَلْنا } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \dot{c}(\omega) + \text{و حَيْثُ و} \to 0 \text{ لِمَّا } \Delta\omega \to 0$$

$$\Delta y = \dot{c}(\omega)\Delta x + \text{و حَيْثُ و} \to 0 \text{ لِمَّا } \Delta\omega \to 0$$

مِثالٌ : لِيَكُنْ ت فِي‌ضَةً مَعْمُولَةً جِهَوِيَّةً مَعْدُودَةً حَيْثُ لِيَكُنْ (١) لِـ ت فِي‌ضَةً مَعْمُولَةً جِهَوِيَّةً مَعْدُودَةً حَيْثُ

لِيَكُنْ ت حَقِيقِيَّةً ، وَحَيْثُ ه ت(٩) = ٣ لِحَا ٢٩ ، لِيَكُنْ

فَلَمْ لَمْ حَدٌّ فَقَطْ ، مِزْمِ

$$\text{فَلَمْ مَعْمُولَةٌ لِمَّا } \omega = \frac{\pi}{٦}$$

(٢) لِـ ص(٩) فِي‌ضَةٌ فَلَمْ لَمْ جِهَوِيَّةٌ مَعْدُودَةٌ حَيْثُ حَيْثُ ه

$$ص(٩) = ٠,١ \text{ لِحَا } \frac{\pi}{٤} + ٠,٢ \text{ لِحَا } \frac{\pi}{٤} ,$$

لِيَكُنْ فَلَمْ لَمْ مَعْمُولَةٌ لِمَّا ٩ = ١

$$\dot{c}(\omega) = \text{لِحَا } ٦\omega \text{ لِيَاتُ } \omega = \frac{\pi}{١٢}$$

(٢) $\dot{c}(\omega) = \text{لِحَا } ٢\omega - \text{لِحَا } ٤\omega$ ، لِيَاتُ $\omega = \frac{\pi}{٤}$ ، لِمَّا ٩ = (٢)

(٣) $\dot{c}(\omega) = \text{لِلا } ٣\omega + ٢ \text{ لِحَا } \omega$ ، لِيَاتُ $\omega =$ مَفْمُولَةٌ

الدرس (٢٢) وحدة سعة وحدة وسيلة شائعة هو لتر ويكتب ل.

يقدم إذهب نموذج مؤقت لتعلم يمكنه أن

يستطيع تحويل سعة ٥ طن ٤٠٠ طن ولتر

تعلم أشكال هندسية

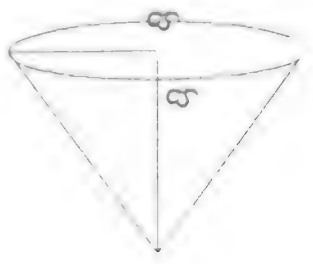
$$\text{حجم} = \frac{\text{ط}}{\text{٣}} \times \text{ط}^{\text{٢}} \times \text{ع}$$

$$\text{ع} = ٠٫٨٥ \times \text{ط} = ٢٠٠$$

$$\text{حجم} = \frac{\text{ط}}{\text{٣}} \times ١ \times \text{ط}^{\text{٢}}$$

$$\text{حجم} = \text{ط} \times ١ \times \text{ط}^{\text{٢}}$$

$$\text{حجم} = \text{ط} \times ١ \times \text{ط}^{\text{٢}}$$



إذهب (٥، ٢٠)

$$= ٥٠ \text{ ط} \times ٢٠٠ = ٥٢٥ \text{ ط}$$

نموذج مؤقت لتعلم يمكنه

الدرس (٢٣) إذهب مؤقت لمدة ١٠١ دقيقة

يقدم إذهب

يقدم إذهب دليل تعليم :

وظيفة استنتاج (٣) إلى استنتاج (٤) إلى سؤال فيديو وإجابة

$$\text{ج} (\text{ص} + \Delta \text{ص}) \approx \text{ج} (\text{ص}) + \text{ج}' \text{س} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٤)$$

وظيفة علم دقيق إلى تقدير :

$$\text{ج} (\text{ص} + \Delta \text{ص}) \approx \text{ج} (\text{ص}) + \text{ج} (\text{ص}) \cdot \Delta \text{س} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٣)$$

$$= \text{ج} (\text{ص}) + \text{ج}' \text{س}$$

وفيه $\text{ج} (\text{ص} + \Delta \text{ص}) \approx \text{س} + \Delta \text{س}$

وإذا علم أن $\Delta \text{س} \neq \text{ج}' \text{س}$

$$\text{ج}' \text{س} = \text{ج} (\text{ص}) \cdot \Delta \text{ص} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

فإذا قدرنا أن $\Delta \text{ص}$ تغير لأن ج' س تؤول إلى

$$\Delta \text{س} \approx \text{ج} (\text{ص}) \cdot \Delta \text{ص} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

وفيه :

(ب $\cdot \Delta$ ص)

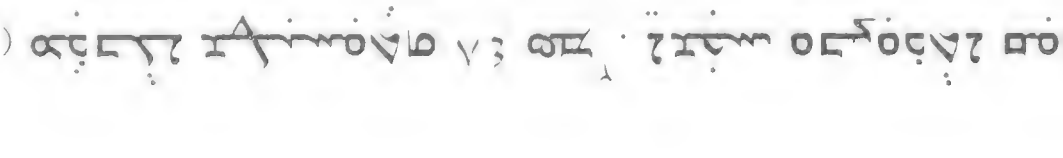
وإذا كانت قيمة ص تساوي ٠٫١ ص فإن قيمة تغير ص

تؤول إلى $\Delta \text{س} = \text{ج} (\text{ص}) \cdot \Delta \text{ص} + \text{ب} \cdot \Delta \text{ص}$

٣) إذا كانت $\vec{ب}$ هي متجه الموضع لنقطة ب $(٣، ٠، ٠)$ فإن معادلة المستقيم ل المار بالنقطة ب والموازي للمتجه $\vec{ع} = ٢\vec{ت} + ٦\vec{ك}$ هي

$$\frac{س - ٣}{٢} = \frac{ص}{٠} = \frac{ع - ٠}{٦}$$

ويمكن تمثيل المستقيم ل بيانيًا كما في الشكل المقابل.



تمارين ٣ - ٦

١) اكتب معادلة المستوى $ح$ الذي يمر بالنقطة أ $(٢، ٣، ٠)$ ويوازي المستوى $ح_١$ الذي معادلته $س + ٢ص - ٣ع = ٥$

٢) أوجد معادلة المستوى $ح$ الذي يمر بالنقطة ب $(١، ٠، ٢)$ ويوازي المستوى $ح_٢$ الذي معادلته $٢س - ص + ٣ع = ٦$

٣) أوجد معادلة المستوى $ح$ الذي يمر بالنقطة ج $(٠، ٢، ٣)$ ويوازي المستوى $ح_٣$ الذي معادلته $٣س + ٢ص - ع = ٤$

٤) أوجد معادلة المستوى $ح$ الذي يمر بالنقطة د $(٢، ٣، ٠)$ ويوازي المستوى $ح_٤$ الذي معادلته $س + ص + ٢ع = ٥$

٥) أوجد معادلة المستوى $ح$ الذي يمر بالنقطة هـ $(٣، ٠، ٢)$ ويوازي المستوى $ح_٥$ الذي معادلته $٢س - ٣ص + ع = ٦$

٦) أوجد معادلة المستوى $ح$ الذي يمر بالنقطة و $(٠، ٢، ٣)$ ويوازي المستوى $ح_٦$ الذي معادلته $٣س + ٢ص - ٤ع = ٥$

٧) أوجد معادلة المستوى $ح$ الذي يمر بالنقطة ز $(٢، ٣، ٠)$ ويوازي المستوى $ح_٧$ الذي معادلته $س + ص + ٢ع = ٥$

٨) أوجد معادلة المستوى $ح$ الذي يمر بالنقطة ح $(٣، ٠، ٢)$ ويوازي المستوى $ح_٨$ الذي معادلته $٢س - ٣ص + ع = ٦$

٩) أوجد معادلة المستوى $ح$ الذي يمر بالنقطة ط $(٠، ٢، ٣)$ ويوازي المستوى $ح_٩$ الذي معادلته $٣س + ٢ص - ٤ع = ٥$

١٠) أوجد معادلة المستوى $ح$ الذي يمر بالنقطة ي $(٢، ٣، ٠)$ ويوازي المستوى $ح_١٠$ الذي معادلته $س + ص + ٢ع = ٥$

١١) أوجد معادلة المستوى $ح$ الذي يمر بالنقطة ك $(٣، ٠، ٢)$ ويوازي المستوى $ح_١١$ الذي معادلته $٢س - ٣ص + ع = ٦$

١٢) أوجد معادلة المستوى $ح$ الذي يمر بالنقطة ل $(٠، ٢، ٣)$ ويوازي المستوى $ح_١٢$ الذي معادلته $٣س + ٢ص - ٤ع = ٥$

تمرين ٣ - ٧

١) متغير عشوائي $س$ يأخذ القيم $١، ٢، ٣، ٤$ فقط. إذا كان $ل(س) = \frac{١}{١٠} س$ فأوجد $ل(س = ٣)$

٢) إذا كان $ل(س) = \frac{١}{٨} س$ حيث $س = ١، ٢، ٣، ٤$ فأوجد $ل(س = ٣)$

٣) إذا كان $ل(س) = \frac{١}{١٠} س$ حيث $س = ١، ٢، ٣، ٤$ فأوجد $ل(س = ٣)$

٤) إذا كان $ل(س) = \frac{١}{٨} س$ حيث $س = ١، ٢، ٣، ٤$ فأوجد $ل(س = ٣)$

٥) إذا كان $ل(س) = \frac{١}{١٠} س$ حيث $س = ١، ٢، ٣، ٤$ فأوجد $ل(س = ٣)$

٦) إذا كان $ل(س) = \frac{١}{٨} س$ حيث $س = ١، ٢، ٣، ٤$ فأوجد $ل(س = ٣)$

٧) إذا كان $ل(س) = \frac{١}{١٠} س$ حيث $س = ١، ٢، ٣، ٤$ فأوجد $ل(س = ٣)$

٨) إذا كان $ل(س) = \frac{١}{٨} س$ حيث $س = ١، ٢، ٣، ٤$ فأوجد $ل(س = ٣)$

٩) إذا كان $ل(س) = \frac{١}{١٠} س$ حيث $س = ١، ٢، ٣، ٤$ فأوجد $ل(س = ٣)$

١٠) إذا كان $ل(س) = \frac{١}{٨} س$ حيث $س = ١، ٢، ٣، ٤$ فأوجد $ل(س = ٣)$

١١) إذا كان $ل(س) = \frac{١}{١٠} س$ حيث $س = ١، ٢، ٣، ٤$ فأوجد $ل(س = ٣)$

١٢) إذا كان $ل(س) = \frac{١}{٨} س$ حيث $س = ١، ٢، ٣، ٤$ فأوجد $ل(س = ٣)$

تعريف (٢.٧.٣) يقال للدالة f ذات مجموعة تعريف جزئية أن لها نهاية L عند $x = a$، ويكتب $\lim_{x \to a} f(x) = L$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث $|f(x) - L| < \varepsilon$ لكل x في مجال تعريف f حيث $0 < |x - a| < \delta$.

ملاحظة لا يشترط في تعريف النهاية أن تكون الدالة معرفة عند $x = a$، ولا أن تكون $f(a) = L$.

مثال (٢.٧.٤) استخدم تعريف النهاية لإثبات أن $\lim_{x \to 3} (2x - 1) = 5$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $|(2x - 1) - 5| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 3| < \delta$.

$$|(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3|$$

إذن نريد $2|x - 3| < \varepsilon$، أي $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{2}$.

نختار $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. فإذا كان $0 < |x - 3| < \delta$ فإن

$$|(2x - 1) - 5| = 2|x - 3| < 2\delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 3} (2x - 1) = 5$.

مثال (٢.٧.٥) أثبت أن $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $|x^2 - 4| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 2| < \delta$.

$$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|$$

نقيد $\delta \leq 1$، فإذا كان $|x - 2| < 1$ فإن $1 < x < 3$، ومنه $|x + 2| < 5$.

إذن $|x^2 - 4| < 5|x - 2|$، ونريد $5|x - 2| < \varepsilon$، أي $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$.

نختار $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{5}\right)$. فإذا كان $0 < |x - 2| < \delta$ فإن

$$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < \delta \cdot 5 \leq \frac{\varepsilon}{5} \cdot 5 = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

مثال (٢.٧.٦) أثبت أن $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 2| < \delta$.

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2 - x}{2x}\right| = \frac{|x - 2|}{2|x|}$$

نقيد $\delta \leq 1$، فإذا كان $|x - 2| < 1$ فإن $1 < x < 3$، ومنه $|x| > 1$، أي $\frac{1}{|x|} < 1$.

إذن $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}|x - 2|$، ونريد $\frac{1}{2}|x - 2| < \varepsilon$، أي $|x - 2| < 2\varepsilon$.

نختار $\delta = \min(1, 2\varepsilon)$. فإذا كان $0 < |x - 2| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|x - 2|}{2|x|} < \frac{\delta}{2} \cdot 1 \leq \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

مثال (٢.٧.٧) أثبت أن $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $|x^2 - 9| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 3| < \delta$.

$$|x^2 - 9| = |x - 3||x + 3|$$

نقيد $\delta \leq 1$، فإذا كان $|x - 3| < 1$ فإن $2 < x < 4$، ومنه $|x + 3| < 7$.

إذن $|x^2 - 9| < 7|x - 3|$، ونريد $7|x - 3| < \varepsilon$، أي $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{7}$.

نختار $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{7}\right)$. فإذا كان $0 < |x - 3| < \delta$ فإن

$$|x^2 - 9| = |x - 3||x + 3| < \delta \cdot 7 \leq \frac{\varepsilon}{7} \cdot 7 = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$.

مثال (٢.٧.٨) أثبت أن $\lim_{x \to 2} x^3 = 8$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $|x^3 - 8| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 2| < \delta$.

$$|x^3 - 8| = |x - 2||x^2 + 2x + 4|$$

نقيد $\delta \leq 1$، فإذا كان $|x - 2| < 1$ فإن $1 < x < 3$، ومنه $|x^2 + 2x + 4| < 19$.

إذن $|x^3 - 8| < 19|x - 2|$، ونريد $19|x - 2| < \varepsilon$، أي $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{19}$.

نختار $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{19}\right)$. فإذا كان $0 < |x - 2| < \delta$ فإن

$$|x^3 - 8| = |x - 2||x^2 + 2x + 4| < \delta \cdot 19 \leq \frac{\varepsilon}{19} \cdot 19 = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 2} x^3 = 8$.

مثال (٢.٧.٩) أثبت أن $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 1| < \delta$.

$$\left|\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2\right| = |(x + 1) - 2| = |x - 1|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 1| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2\right| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

مثال (٢.٧.١٠) أثبت أن $\lim_{x \to 0} \sqrt{x + 4} = 2$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $|\sqrt{x + 4} - 2| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 0| < \delta$.

$$|\sqrt{x + 4} - 2| = \left|\frac{(\sqrt{x + 4} - 2)(\sqrt{x + 4} + 2)}{\sqrt{x + 4} + 2}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x + 4} + 2}$$

نقيد $\delta \leq 4$، فإذا كان $|x| < 4$ فإن $0 < x + 4 < 8$، ومنه $\sqrt{x + 4} + 2 > 2$.

إذن $|\sqrt{x + 4} - 2| < \frac{1}{2}|x|$، ونريد $\frac{1}{2}|x| < \varepsilon$، أي $|x| < 2\varepsilon$.

نختار $\delta = \min(4, 2\varepsilon)$. فإذا كان $0 < |x| < \delta$ فإن

$$|\sqrt{x + 4} - 2| = \frac{|x|}{\sqrt{x + 4} + 2} < \frac{\delta}{2} \leq \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 0} \sqrt{x + 4} = 2$.

مثال (٢.٧.١١) أثبت أن $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 2| < \delta$.

$$\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{4 - x^2}{4x^2}\right| = \frac{|x - 2||x + 2|}{4x^2}$$

نقيد $\delta \leq 1$، فإذا كان $|x - 2| < 1$ فإن $1 < x < 3$، ومنه $|x + 2| < 5$ و $x^2 > 1$.

إذن $\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\right| < \frac{5}{4}|x - 2|$، ونريد $\frac{5}{4}|x - 2| < \varepsilon$، أي $|x - 2| < \frac{4\varepsilon}{5}$.

نختار $\delta = \min\left(1, \frac{4\varepsilon}{5}\right)$. فإذا كان $0 < |x - 2| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\right| = \frac{|x - 2||x + 2|}{4x^2} < \frac{\delta \cdot 5}{4 \cdot 1} \leq \frac{\frac{4\varepsilon}{5} \cdot 5}{4} = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$.

مثال (٢.٧.١٢) أثبت أن $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 3| < \delta$.

$$\left|\frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6\right| = |(x + 3) - 6| = |x - 3|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 3| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6\right| = |x - 3| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

مثال (٢.٧.١٣) أثبت أن $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^3 - 1}{x - 1} - 3\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 1| < \delta$.

$$\left|\frac{x^3 - 1}{x - 1} - 3\right| = |(x^2 + x + 1) - 3| = |x^2 + x - 2| = |x - 1||x + 2|$$

نقيد $\delta \leq 1$، فإذا كان $|x - 1| < 1$ فإن $0 < x < 2$، ومنه $|x + 2| < 4$.

إذن $\left|\frac{x^3 - 1}{x - 1} - 3\right| < 4|x - 1|$، ونريد $4|x - 1| < \varepsilon$، أي $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{4}$.

نختار $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{4}\right)$. فإذا كان $0 < |x - 1| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^3 - 1}{x - 1} - 3\right| = |x - 1||x + 2| < \delta \cdot 4 \leq \frac{\varepsilon}{4} \cdot 4 = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$.

مثال (٢.٧.١٤) أثبت أن $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 2| < \delta$.

$$\left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4\right| = |(x + 2) - 4| = |x - 2|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 2| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4\right| = |x - 2| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

مثال (٢.٧.١٥) أثبت أن $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{x} = 1$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^2 + x}{x} - 1\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 0| < \delta$.

$$\left|\frac{x^2 + x}{x} - 1\right| = |(x + 1) - 1| = |x|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^2 + x}{x} - 1\right| = |x| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{x} = 1$.

مثال (٢.٧.١٦) أثبت أن $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = 5$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} - 5\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 1| < \delta$.

$$\left|\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} - 5\right| = |(x + 4) - 5| = |x - 1|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 1| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} - 5\right| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = 5$.

مثال (٢.٧.١٧) أثبت أن $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = 12$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^3 - 8}{x - 2} - 12\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 2| < \delta$.

$$\left|\frac{x^3 - 8}{x - 2} - 12\right| = |(x^2 + 2x + 4) - 12| = |x^2 + 2x - 8| = |x - 2||x + 4|$$

نقيد $\delta \leq 1$، فإذا كان $|x - 2| < 1$ فإن $1 < x < 3$، ومنه $|x + 4| < 8$.

إذن $\left|\frac{x^3 - 8}{x - 2} - 12\right| < 8|x - 2|$، ونريد $8|x - 2| < \varepsilon$، أي $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{8}$.

نختار $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{8}\right)$. فإذا كان $0 < |x - 2| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^3 - 8}{x - 2} - 12\right| = |x - 2||x + 4| < \delta \cdot 8 \leq \frac{\varepsilon}{8} \cdot 8 = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = 12$.

مثال (٢.٧.١٨) أثبت أن $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + x^2}{x^2} = 1$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^3 + x^2}{x^2} - 1\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 0| < \delta$.

$$\left|\frac{x^3 + x^2}{x^2} - 1\right| = |(x + 1) - 1| = |x|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^3 + x^2}{x^2} - 1\right| = |x| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + x^2}{x^2} = 1$.

مثال (٢.٧.١٩) أثبت أن $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = 4$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} - 4\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 1| < \delta$.

$$\left|\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} - 4\right| = |(x + 3) - 4| = |x - 1|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 1| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} - 4\right| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = 4$.

مثال (٢.٧.٢٠) أثبت أن $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = 2$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^2 - 2x}{x - 2} - 2\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 2| < \delta$.

$$\left|\frac{x^2 - 2x}{x - 2} - 2\right| = |x - 2| = |x - 2|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 2| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^2 - 2x}{x - 2} - 2\right| = |x - 2| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = 2$.

مثال (٢.٧.٢١) أثبت أن $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = 3$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^2 - 3x}{x - 3} - 3\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 3| < \delta$.

$$\left|\frac{x^2 - 3x}{x - 3} - 3\right| = |x - 3| = |x - 3|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 3| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^2 - 3x}{x - 3} - 3\right| = |x - 3| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = 3$.

مثال (٢.٧.٢٢) أثبت أن $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} = 6$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} - 6\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 1| < \delta$.

$$\left|\frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} - 6\right| = |(x + 5) - 6| = |x - 1|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 1| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} - 6\right| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} = 6$.

مثال (٢.٧.٢٣) أثبت أن $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2} = 1$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^3 - 2x^2}{x^2} - 1\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 2| < \delta$.

$$\left|\frac{x^3 - 2x^2}{x^2} - 1\right| = |(x - 2) - 1| = |x - 3|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 2| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^3 - 2x^2}{x^2} - 1\right| = |x - 3| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2} = 1$.

مثال (٢.٧.٢٤) أثبت أن $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = 7$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} - 7\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 1| < \delta$.

$$\left|\frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} - 7\right| = |(x + 6) - 7| = |x - 1|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 1| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} - 7\right| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = 7$.

مثال (٢.٧.٢٥) أثبت أن $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2} = 0$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^3 - 3x^2}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 2| < \delta$.

$$\left|\frac{x^3 - 3x^2}{x^2} - 0\right| = |x - 3| = |x - 3|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 2| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^3 - 3x^2}{x^2} - 0\right| = |x - 3| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2} = 0$.

مثال (٢.٧.٢٦) أثبت أن $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} = 8$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} - 8\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 1| < \delta$.

$$\left|\frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} - 8\right| = |(x + 7) - 8| = |x - 1|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 1| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} - 8\right| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} = 8$.

مثال (٢.٧.٢٧) أثبت أن $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 4x^2}{x^2} = -1$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^3 - 4x^2}{x^2} - (-1)\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 2| < \delta$.

$$\left|\frac{x^3 - 4x^2}{x^2} - (-1)\right| = |(x - 4) + 1| = |x - 3|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 2| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^3 - 4x^2}{x^2} - (-1)\right| = |x - 3| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 4x^2}{x^2} = -1$.

مثال (٢.٧.٢٨) أثبت أن $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 7x - 8}{x - 1} = 9$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^2 + 7x - 8}{x - 1} - 9\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 1| < \delta$.

$$\left|\frac{x^2 + 7x - 8}{x - 1} - 9\right| = |(x + 8) - 9| = |x - 1|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 1| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^2 + 7x - 8}{x - 1} - 9\right| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 7x - 8}{x - 1} = 9$.

مثال (٢.٧.٢٩) أثبت أن $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 5x^2}{x^2} = -2$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^3 - 5x^2}{x^2} - (-2)\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 2| < \delta$.

$$\left|\frac{x^3 - 5x^2}{x^2} - (-2)\right| = |(x - 5) + 2| = |x - 3|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 2| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^3 - 5x^2}{x^2} - (-2)\right| = |x - 3| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 5x^2}{x^2} = -2$.

مثال (٢.٧.٣٠) أثبت أن $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 8x - 9}{x - 1} = 10$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^2 + 8x - 9}{x - 1} - 10\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 1| < \delta$.

$$\left|\frac{x^2 + 8x - 9}{x - 1} - 10\right| = |(x + 9) - 10| = |x - 1|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 1| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^2 + 8x - 9}{x - 1} - 10\right| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 8x - 9}{x - 1} = 10$.

مثال (٢.٧.٣١) أثبت أن $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 6x^2}{x^2} = -3$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^3 - 6x^2}{x^2} - (-3)\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 2| < \delta$.

$$\left|\frac{x^3 - 6x^2}{x^2} - (-3)\right| = |(x - 6) + 3| = |x - 3|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 2| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^3 - 6x^2}{x^2} - (-3)\right| = |x - 3| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 6x^2}{x^2} = -3$.

مثال (٢.٧.٣٢) أثبت أن $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 9x - 10}{x - 1} = 11$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^2 + 9x - 10}{x - 1} - 11\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 1| < \delta$.

$$\left|\frac{x^2 + 9x - 10}{x - 1} - 11\right| = |(x + 10) - 11| = |x - 1|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 1| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^2 + 9x - 10}{x - 1} - 11\right| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 9x - 10}{x - 1} = 11$.

مثال (٢.٧.٣٣) أثبت أن $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 7x^2}{x^2} = -4$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^3 - 7x^2}{x^2} - (-4)\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 2| < \delta$.

$$\left|\frac{x^3 - 7x^2}{x^2} - (-4)\right| = |(x - 7) + 4| = |x - 3|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 2| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^3 - 7x^2}{x^2} - (-4)\right| = |x - 3| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 7x^2}{x^2} = -4$.

مثال (٢.٧.٣٤) أثبت أن $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 10x - 11}{x - 1} = 12$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^2 + 10x - 11}{x - 1} - 12\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 1| < \delta$.

$$\left|\frac{x^2 + 10x - 11}{x - 1} - 12\right| = |(x + 11) - 12| = |x - 1|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 1| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^2 + 10x - 11}{x - 1} - 12\right| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 10x - 11}{x - 1} = 12$.

مثال (٢.٧.٣٥) أثبت أن $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8x^2}{x^2} = -5$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^3 - 8x^2}{x^2} - (-5)\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 2| < \delta$.

$$\left|\frac{x^3 - 8x^2}{x^2} - (-5)\right| = |(x - 8) + 5| = |x - 3|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 2| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^3 - 8x^2}{x^2} - (-5)\right| = |x - 3| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8x^2}{x^2} = -5$.

مثال (٢.٧.٣٦) أثبت أن $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 11x - 12}{x - 1} = 13$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^2 + 11x - 12}{x - 1} - 13\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 1| < \delta$.

$$\left|\frac{x^2 + 11x - 12}{x - 1} - 13\right| = |(x + 12) - 13| = |x - 1|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 1| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^2 + 11x - 12}{x - 1} - 13\right| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 11x - 12}{x - 1} = 13$.

مثال (٢.٧.٣٧) أثبت أن $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 9x^2}{x^2} = -6$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^3 - 9x^2}{x^2} - (-6)\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 2| < \delta$.

$$\left|\frac{x^3 - 9x^2}{x^2} - (-6)\right| = |(x - 9) + 6| = |x - 3|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 2| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^3 - 9x^2}{x^2} - (-6)\right| = |x - 3| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 9x^2}{x^2} = -6$.

مثال (٢.٧.٣٨) أثبت أن $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 12x - 13}{x - 1} = 14$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^2 + 12x - 13}{x - 1} - 14\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 1| < \delta$.

$$\left|\frac{x^2 + 12x - 13}{x - 1} - 14\right| = |(x + 13) - 14| = |x - 1|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 1| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^2 + 12x - 13}{x - 1} - 14\right| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 12x - 13}{x - 1} = 14$.

مثال (٢.٧.٣٩) أثبت أن $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 10x^2}{x^2} = -7$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^3 - 10x^2}{x^2} - (-7)\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 2| < \delta$.

$$\left|\frac{x^3 - 10x^2}{x^2} - (-7)\right| = |(x - 10) + 7| = |x - 3|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 2| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^3 - 10x^2}{x^2} - (-7)\right| = |x - 3| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 10x^2}{x^2} = -7$.

مثال (٢.٧.٤٠) أثبت أن $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 13x - 14}{x - 1} = 15$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^2 + 13x - 14}{x - 1} - 15\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 1| < \delta$.

$$\left|\frac{x^2 + 13x - 14}{x - 1} - 15\right| = |(x + 14) - 15| = |x - 1|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 1| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^2 + 13x - 14}{x - 1} - 15\right| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 13x - 14}{x - 1} = 15$.

مثال (٢.٧.٤١) أثبت أن $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 11x^2}{x^2} = -8$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^3 - 11x^2}{x^2} - (-8)\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 2| < \delta$.

$$\left|\frac{x^3 - 11x^2}{x^2} - (-8)\right| = |(x - 11) + 8| = |x - 3|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 2| < \delta$ فإن

$$\left|\frac{x^3 - 11x^2}{x^2} - (-8)\right| = |x - 3| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 11x^2}{x^2} = -8$.

مثال (٢.٧.٤٢) أثبت أن $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 14x - 15}{x - 1} = 16$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^2 + 14x - 15}{x - 1} - 16\right| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - 1| < \delta$.

$$\left|\frac{x^2 + 14x - 15}{x - 1} - 16\right| = |(x + 15) - 16| = |x - 1|$$

إذن نختار $\delta = \varepsilon$. فإذا كان $0 < |x - 1| < \delta$ فإن

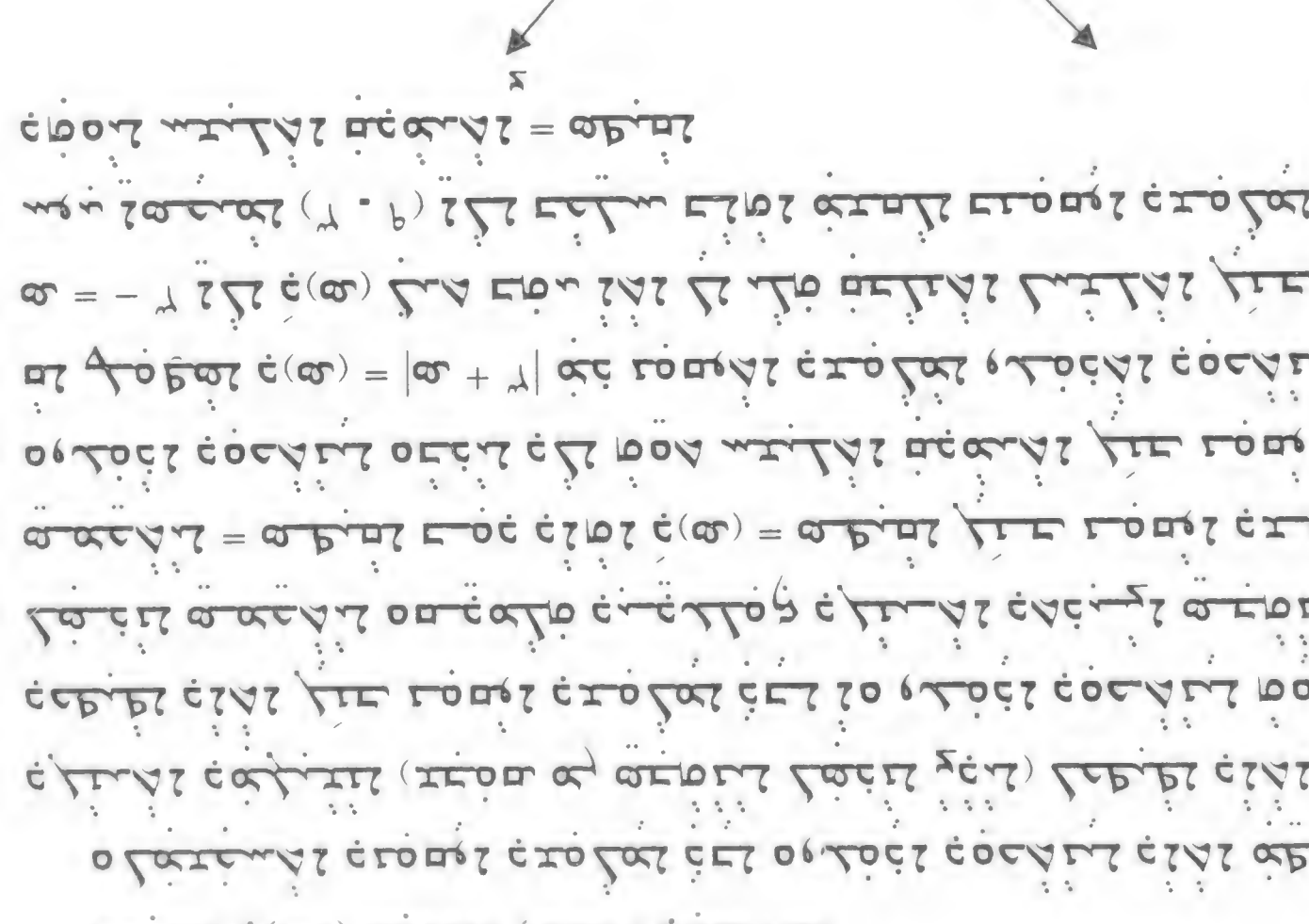
$$\left|\frac{x^2 + 14x - 15}{x - 1} - 16\right| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$$

وبذلك يكون $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 14x - 15}{x - 1} = 16$.

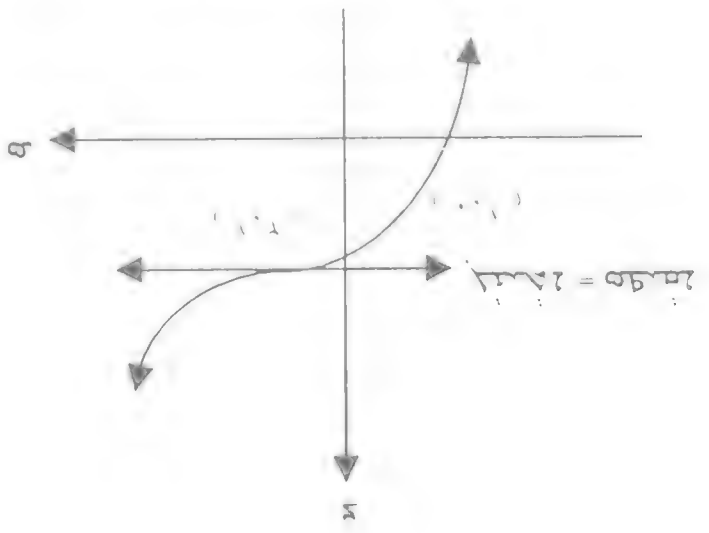
مثال (٢.٧.٤٣) أثبت أن $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 12x^2}{x^2} = -9$.

الحل

نريد أن نجد لكل $\varepsilon > 0$ عددًا $\delta > 0$ بحيث $\left|\frac{x^3 - 12x^2}{x^2


ص
(٣ ،٠ -)
ص = | س + ٣| الدالة لا يجاد أكبر وصل وأصغر قيمة ولدة
الشكل (٣ - ٩)
ص
الدالة = صفر
الدالة = صفر
الدالة - صفر أكبر وصل وأصغر قيمة
الشكل (٣ - ١٠)

مثال (٢ - ٨)



ولإيجاد معادلة مماس المنحنى والمار بالنقطة (١ ، ٢) على الصورة ص = أ س + ب

فيكون المطلوب إيجاد ميل المماس أ ، ولكن أ = ظا هـ

ميل المماس = ظا هـ

إذاً إذا كان ميل المماس يساوي صفر فإن المماس يوازي محور السينات.

إذا كان ميل المماس غير معرف فإن المماس يوازي محور الصادات.

مثال (٢ - ٩)

أوجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة ص = (س - ١)^{٣} + ٢ عند النقطة (١ ، ٢)

ثم أوجد معادلة العمودي على المماس عند هذه النقطة.

الحل

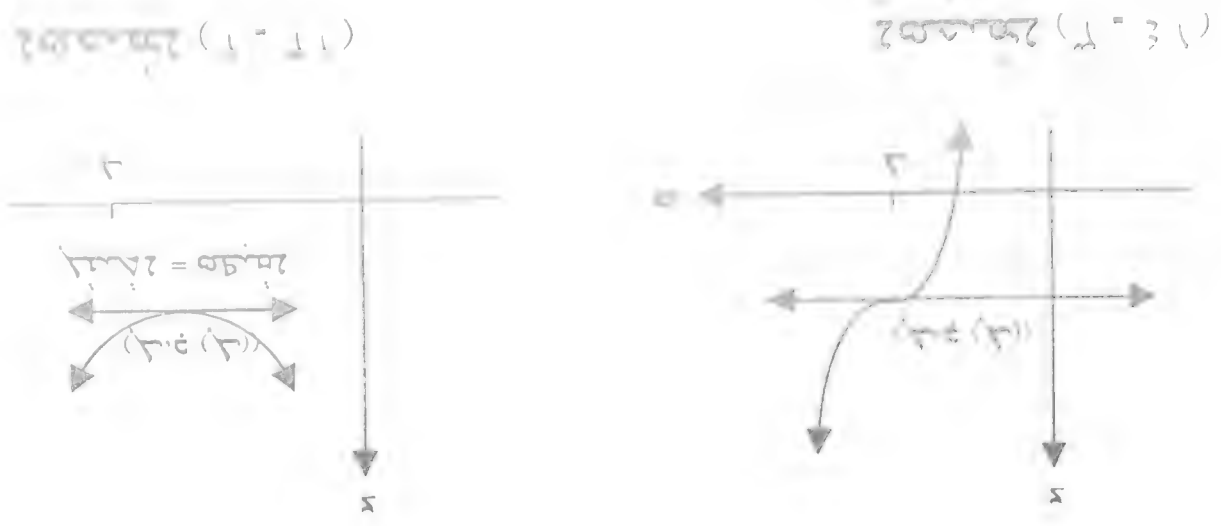
ص = (س - ١)^{٣} + ٢ ⇒

ص$'$ = ٣ × ١ × (س - ١)^{٢}

ص$'$ (س) = ٣ (س - ١)^{٢}

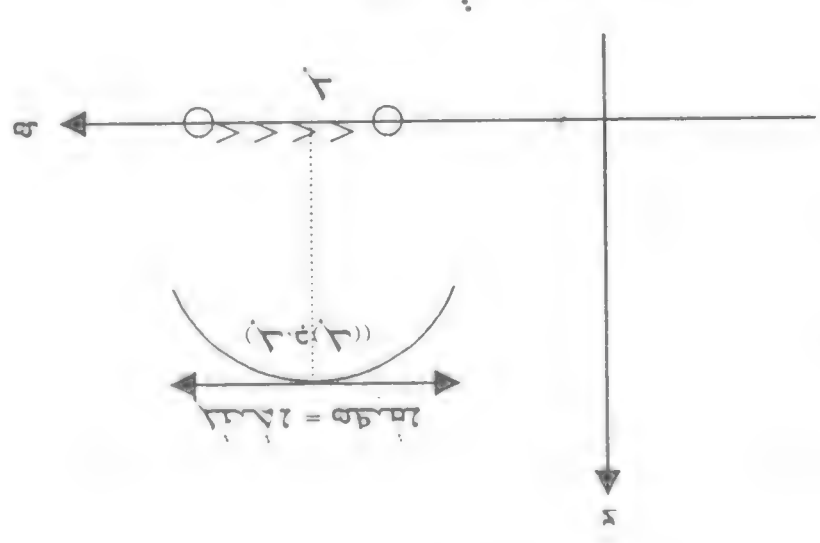
ص$'$ (١) = صفر

∴ معادلة المماس (١ ، ٢) هي معادلة الخط المار بالنقطة ويوازي المحور



مثال (٣ - ٤١)

أوجد $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ **إن أمكن.**



مثال (٣ - ٤٢)

أوجد $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{|س - ٣|}$ **إن أمكن.**

الحل

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{|س - ٣|} = \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{|س - ٣|}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{\pm(س - ٣)}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \pm(س + ٣)$$

$$= \pm(٣ + ٣) = \pm ٦$$

بما أن $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{|س - ٣|}$ **لا تساوي عدداً حقيقياً واحداً فإن** $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{|س - ٣|}$ **غير موجودة.**

مثال (٣ - ٤٣)

أوجد $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{|س - ٣|}$ **إن أمكن.**

الحل

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{|س - ٣|} = \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{|س - ٣|}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣} (س + ٣)$$

$$= ٣ + ٣ = ٦$$

مثال (٣ - ٤٤)

أوجد $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{|س - ٣|}$ **إن أمكن.**

الحل

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{|س - ٣|} = \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{|س - ٣|}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{-(س - ٣)}$$

$$= \lim_{س \to ٣} -(س + ٣)$$

$$= -(٣ + ٣) = -٦$$

بما أن $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{|س - ٣|}$ **لا تساوي عدداً حقيقياً واحداً فإن** $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{|س - ٣|}$ **غير موجودة.**

ملاحظة (٣ - ٩)

١) إذا كان (ل، ق(ل)) نقطة انقلاب لمنحنى ق، فإن ق غير قابلة للاشتقاق عند س = ل، أي قد تكون ق(ل) غير موجودة أو ق(ل) = ٠ أو ق(ل) = ∞ أو ق(ل) = -∞.

ب) إذا كان هناك فترة مفتوحة ط تحتوي العدد ل بحيث ق(س) < ٠ لكل س ∈ ط، س ≠ ل، وكانت ق(س) > ٠ لكل س ∈ ط، س ≠ ل، فإن ق(ل) = ٠ أو ق(ل) غير موجودة.

مثال (٣ - ٤٥)

أوجد النقاط الحرجة للاقتران $ق(س) = س^{\frac{٢}{٣}}$ **في الفترة** $[-٢، ٢]$ **ثم حدد القيم القصوى المطلقة إن وجدت.**

الحل

$$ق(س) = س^{\frac{٢}{٣}}$$

$$ق'(س) = \frac{٢}{٣} س^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{٣ \sqrt[٣]{س}}$$

$$ق'(س) = ٠ \Leftarrow \text{لا يوجد}$$

النقاط الحرجة هي $(٠، ٠)$ **و** $(٠، ١)$

مثال (٣ - ٤٦)

أوجد النقاط الحرجة للاقتران $ق(س) = س^{\frac{٢}{٣}}$ **في الفترة** $[-١، ٢]$ **ثم حدد القيم القصوى المطلقة إن وجدت.**

الحل

$$ق(س) = س^{\frac{٢}{٣}}$$

$$ق'(س) = \frac{٢}{٣} س^{-\frac{١}{٣}} = \frac{٢}{٣ \sqrt[٣]{س}}$$

$$ق'(س) = ٠ \Leftarrow \text{لا يوجد}$$

النقاط الحرجة هي $(٠، ٠)$ **و** $(٠، ١)$

مبرهنة (٣ . ١)

(أ) إذا كانت الدالة د معرفة عند العدد ج ، ونهاية د عند ج تساوي د(ج) فإن الدالة د متصلة عند ج .

(ب) إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المفتوحة (ل ، ك) حيث ج ∈ (ل ، ك) ، وكانت د متصلة عند ج فإن :

$$\lim_{س \to ج^+} د(س) = د(ج) = \lim_{س \to ج^-} د(س)$$

(ج) إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المغلقة [ل ، ك] حيث ج ∈ (ل ، ك) ، وكانت د متصلة على الفترة المفتوحة (ل ، ك) فإن :

$$\lim_{س \to ل^+} د(س) = د(ل) \quad , \quad \lim_{س \to ك^-} د(س) = د(ك)$$

نتيجة إذا كانت د متصلة عند ج ، $د(ج) = ص_{ج}$ فإن $\lim_{س \to ج} د(س) = ص_{ج}$

مثال (٣ . ١٤)

ليكن $د(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، \ س < ٢ \\ ٤ & ، \ س = ٢ \\ ٦ - س & ، \ س > ٢ \end{cases}$

ادرس اتصال د عند س = ٢ ، ثم ارسم منحنى د .

الحل

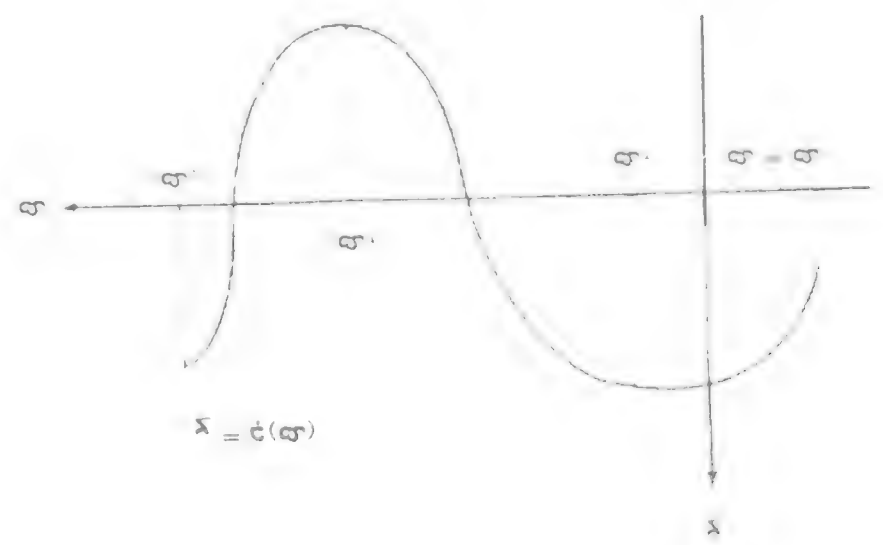
$\lim_{س \to ٢^+} د(س) = \lim_{س \to ٢^+} (٦ - س) = ٤$

$\lim_{س \to ٢^-} د(س) = \lim_{س \to ٢^-} س^{٢} = ٤$

$د(٢) = ٤$

$\therefore \lim_{س \to ٢} د(س) = د(٢)$

$\therefore$ د متصلة عند س = ٢



شكل (٣ . ١٥)

مثال (٣ . ١٥)

ليكن $د(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، \ س < ٠ \\ ٣ & ، \ س = ٠ \\ ٣ - س & ، \ س > ٠ \end{cases}$

ادرس اتصال د عند س = ٠ ، وعين نهايتي د عندما س تؤول إلى الصفر من اليمين ومن اليسار ، ثم ارسم منحنى د .

الحل

د معرفة عند س = ٠ ، د(٠) = ٣

$\lim_{س \to ٠^+} د(س) = \lim_{س \to ٠^+} (٣ - س) = ٣$

$\lim_{س \to ٠^-} د(س) = \lim_{س \to ٠^-} (٢س + ١) = ١$

$\therefore \lim_{س \to ٠^+} د(س) \neq \lim_{س \to ٠^-} د(س)$

$\therefore$ د غير متصلة عند س = ٠ (عند نقطة القفز).

شكل (٣ . ١٥)

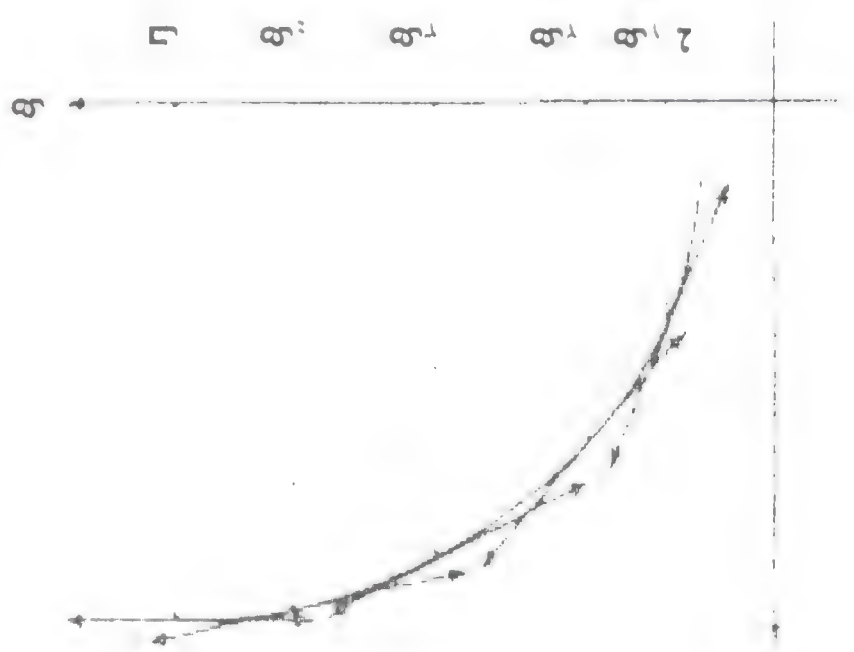
٣ . ٨ نهاية ما عند ∞

مثال (٣ . ١٥)

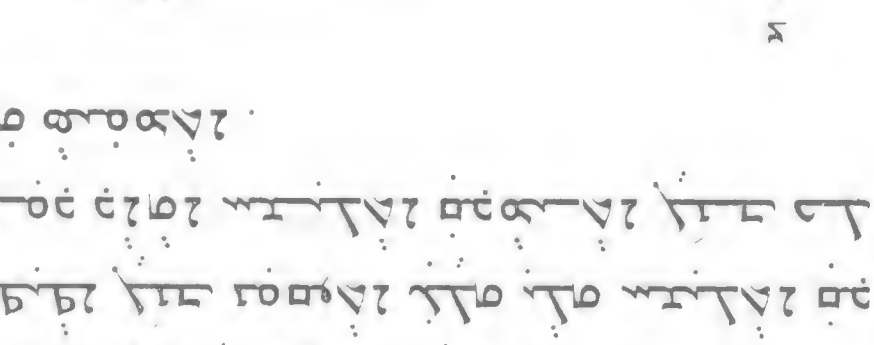
٤. سؤالكوم لدهجمك (٣ - ١٧) دسيد ڤلندا ڤڤكيتتز بَتد ط دومسدا

بلة لدومدا وتا وڤم سڤيلدا ڤڤكمدا لذا بَتد ط دومسدا ك دومڤ

ڤڤكيتتز بلة لدومدا .



لدهجمك (٣ - ١٦)



٤. سؤالكوم د ڤمسمومدا لهـوڤڤلا دلهـجمك (٣ - ١٦) دسيد ڤحڤيڤ

ڤزدا وُسڤتا ملة لهـ (٤ ، د) . فـڤ ٤ـيـة ندك ڤنتا ك ڤكيـتـتا لحڤيڤ

ولمـيـدا ڤحل ك ڤزدا ڤكيـتـتا هـسـوهدا ملة . ولڤ ٽڤـلـدا ڤ ٤ـيـدا

ڤڤكيـتـتز ڤحڤيڤ بَتد ومسمدا ملة بلة سڤيلدا ڤڤكـدا ڤزدا بَتد ڤـ

ومسمدا . دسـڤ ڤزدا سڤـيـلدا ڤڤكـدا بَتد حل ومسمدا ك ومسڤ

ڤڤكيـتـتز بلة هـسـوهدا .

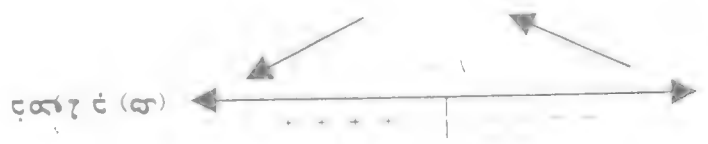
مثال (٢٦) متى تكون الدالة $ق(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} - ٢$ متزايدة وعندما تكون متناقصة ثم أوجد النهايات المحلية.

الحل $ق(س) = ٣س^{٢} + ٦$

نحدد $ق(س) = ٠$

$\therefore ٣س^{٢} + ٦ = ٠$

$\therefore س = -١$

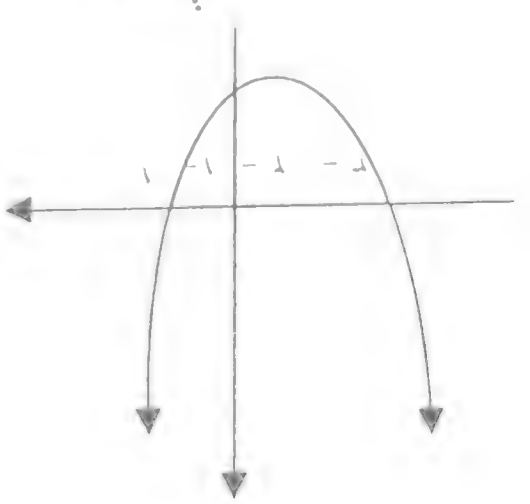


ق متزايدة على الفترة $\{ س : س < -١ \}$

ق متناقصة على الفترة $\{ س : س > -١ \}$

لها نهاية عظمى محلية $(-١ ، -٤)$

ق(-١) = -٤ نهاية عظمى محلية



مثال (٢٧) متى تكون الدالة $ق(س) = س^{٣} + س^{٢} - س + ١$ متزايدة ومتناقصة ثم أوجد نهاياتها المحلية وعين نوعها.

الحل

$ق(س) = ٣س^{٢} + ٢س - ١$

نحدد $ق(س) = ٠$

$\therefore ٣س^{٢} + ٢س - ١ = ٠$

$\therefore (٣س - ١)(س + ١) = ٠$

$\therefore س = \frac{١}{٣}$ ، $س = -١$

ق متزايدة على الفترة $\{ س : س < -١ \} \cup \{ س : س > \frac{١}{٣} \}$

ق متناقصة على الفترة $\{ س : -١ < س < \frac{١}{٣} \}$

لها نهاية عظمى محلية $(-١ ، ١)$

لها نهاية صغرى محلية $(\frac{١}{٣} ، -\frac{٣٢}{٢٧})$

مثال (٢٨)

متى تكون الدالة $ق(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ١$ متزايدة ومتناقصة ثم أوجد نهاياتها المحلية وعين نوعها.

الحل

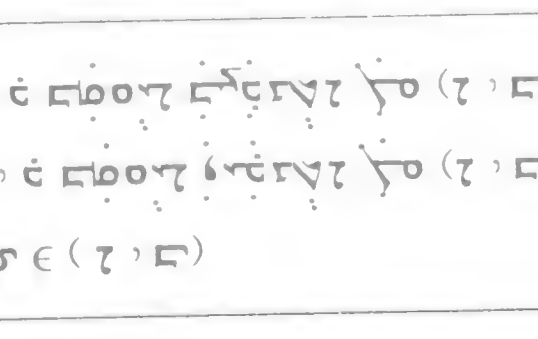
$ق(س) = ٣س^{٢} - ٦س$

نحدد $ق(س) = ٠$

$\therefore ٣س^{٢} - ٦س = ٠$

$\therefore ٣س(س - ٢) = ٠$

$\therefore س = ٠$ ، $س = ٢$



ق متزايدة على الفترة $\{ س : س < ٠ \} \cup \{ س : س > ٢ \}$

ق متناقصة على الفترة $\{ س : ٠ < س < ٢ \}$

لها نهاية عظمى محلية $(٠ ، ١)$

لها نهاية صغرى محلية $(٢ ، -٣)$

مبرهنة (٢٩)

متى $ق$ دالة متصلة على الفترة $[أ ، ب]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(أ ، ب)$ فإن :

(١) إذا كان $ق'(س) > ٠$ لكل $س \in (أ ، ب)$ ، ق متزايدة على الفترة $(أ ، ب)$

(٢) إذا كان $ق'(س) < ٠$ لكل $س \in (أ ، ب)$ ، ق متناقصة على الفترة $(أ ، ب)$

متى $ق$ دالة متصلة على الفترة $[أ ، ب]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(أ ، ب)$ فإن $ق'(س) = ٠$ لكل $س \in (أ ، ب)$

تمرين عام على الوحدة ٩ - ٣

أ اكتب بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل مما يأتي :

١) $\log_{٢} ٣٢$ **٢)** $\log_{٣} \frac{١}{٢٧}$ **٣)** $\log_{٥} ٥$ **٤)** $\log_{٧} ١$

ب أوجد قيمة $س$ في كل مما يأتي :

١) $\log_{٣} س = ٤$ **٢)** $\log_{س} ٢٥ = ٢$ **٣)** $\log_{٢} س = -٣$ **٤)** $\log_{س} ٢ = \frac{١}{٣}$

ج إذا كان $\log_{ب} ٢ = ٠,٤٣١$ ، $\log_{ب} ٣ = ٠,٦٨٣$ فأوجد قيمة كل مما يأتي :

١) $\log_{ب} ٦$ **٢)** $\log_{ب} ٩$ **٣)** $\log_{ب} \frac{٣}{٢}$ **٤)** $\log_{ب} ٢٧$

د إذا كان $\log_{ب} ٢ = ٠,٤٣١$ ، $\log_{ب} ٣ = ٠,٦٨٣$ فأوجد قيمة كل مما يأتي :

١) $\log_{ب} ٦$ **٢)** $\log_{ب} ٩$ **٣)** $\log_{ب} \frac{٣}{٢}$ **٤)** $\log_{ب} ٢٧$

هـ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١) $\log_{٣} (٢س + ١) = ٢$ **٢)** $\log_{٢} (س + ٣) + \log_{٢} (س - ١) = ٣$

٣) $\log_{٣} (س + ٢) - \log_{٣} (س - ٢) = ١$ **٤)** $\log_{٢} (س + ٣) = ٤ - \log_{٢} (س - ٣)$

و إذا كان $\log_{٢} ٣ = ١,٥٨٥$ فأوجد قيمة $س$ التي تحقق المعادلة $٣^{س} = ٢^{س+١}$

ز إذا كان $\log_{٣} ٢ = ٠,٦٣١$ فأوجد قيمة $س$ التي تحقق المعادلة $٢^{س} = ٣^{س-١}$

ح إذا كان $\log_{٣} ٢ = ٠,٦٣١$ فأوجد قيمة $س$ التي تحقق المعادلة $٢^{س} = ٣^{س-١}$

ط أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٢} (س + ٣) = ٤ - \log_{٢} (س - ٣)$

ي أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٣} (س + ٢) - \log_{٣} (س - ٢) = ١$

ك أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٢} (٢س + ١) = ٢$

ل أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٢} (س + ٣) + \log_{٢} (س - ١) = ٣$

م أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٣} (س + ٢) - \log_{٣} (س - ٢) = ١$

ن أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٢} (س + ٣) = ٤ - \log_{٢} (س - ٣)$

س أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٣} (س + ٢) - \log_{٣} (س - ٢) = ١$

ع أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٢} (٢س + ١) = ٢$

ف أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٢} (س + ٣) + \log_{٢} (س - ١) = ٣$

ص أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٣} (س + ٢) - \log_{٣} (س - ٢) = ١$

ق أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٢} (س + ٣) = ٤ - \log_{٢} (س - ٣)$

ر أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٣} (س + ٢) - \log_{٣} (س - ٢) = ١$

ش أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٢} (٢س + ١) = ٢$

ت أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٢} (س + ٣) + \log_{٢} (س - ١) = ٣$

ث أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٣} (س + ٢) - \log_{٣} (س - ٢) = ١$

خ أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٢} (س + ٣) = ٤ - \log_{٢} (س - ٣)$

ذ أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٣} (س + ٢) - \log_{٣} (س - ٢) = ١$

ض أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٢} (٢س + ١) = ٢$

ظ أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٢} (س + ٣) + \log_{٢} (س - ١) = ٣$

غ أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٣} (س + ٢) - \log_{٣} (س - ٢) = ١$

ف أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٢} (س + ٣) = ٤ - \log_{٢} (س - ٣)$

ق أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٣} (س + ٢) - \log_{٣} (س - ٢) = ١$

ك أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٢} (٢س + ١) = ٢$

ل أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٢} (س + ٣) + \log_{٢} (س - ١) = ٣$

م أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٣} (س + ٢) - \log_{٣} (س - ٢) = ١$

ن أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٢} (س + ٣) = ٤ - \log_{٢} (س - ٣)$

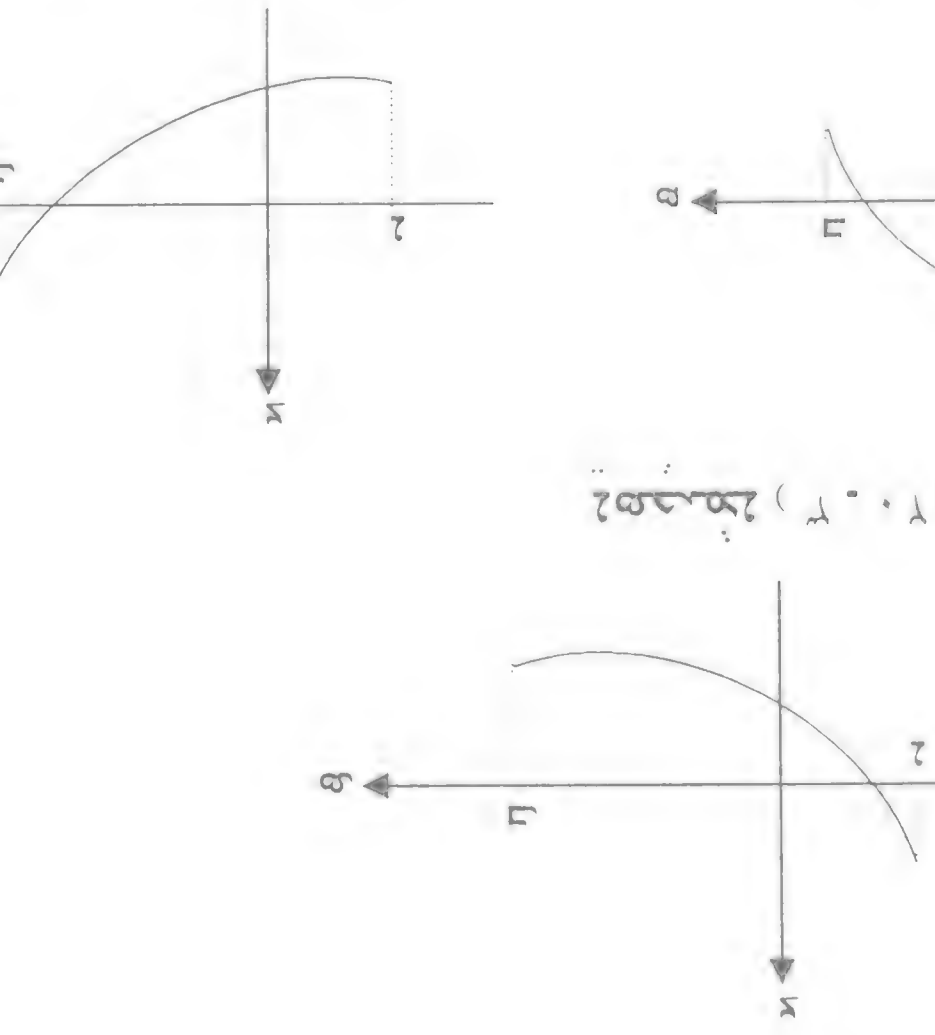
هـ أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٣} (س + ٢) - \log_{٣} (س - ٢) = ١$

و أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٢} (٢س + ١) = ٢$

ز أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٢} (س + ٣) + \log_{٢} (س - ١) = ٣$

ح أوجد مجموعة حل المعادلة $\log_{٣} (س + ٢) - \log_{٣} (س - ٢) = ١

سؤال ۱۵: (۲۰ ، ۳۰) حرکت متحرکی از نقطه ب (ب ، ج) در امتداد محور ب ب' حرکت می‌کند. (۳۰ ، ۲۳) حرکت متحرکی از نقطه ا (ا ، ج) در امتداد محور ا ا' حرکت می‌کند. (۳۰ ، ۲۲) حرکت متحرکی از نقطه د (د ، ج) در امتداد محور د د' حرکت می‌کند. (۲۰ ، ۳۱) حرکت متحرکی از نقطه ه (ه ، ج) در امتداد محور ه ه' حرکت می‌کند.

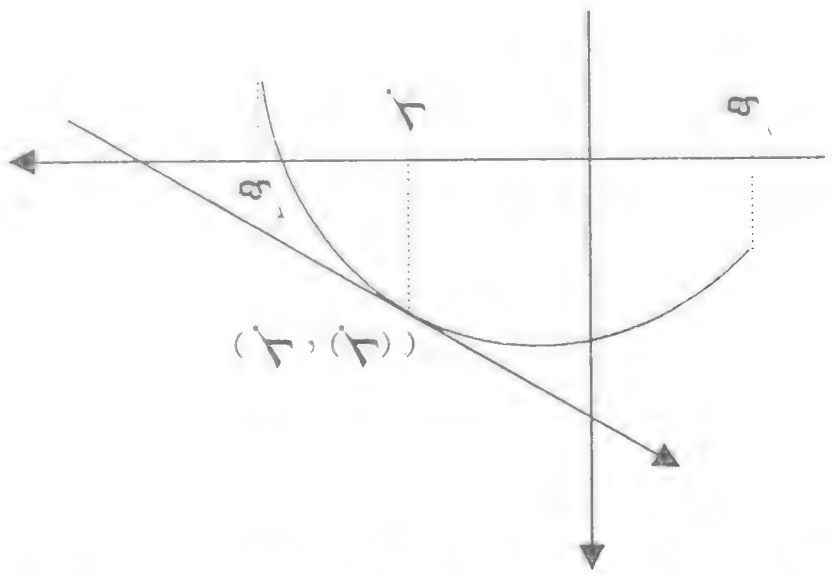


(۲۰ ، ۳۳) حرکت متحرکی از نقطه ب در امتداد محور ب ب' حرکت می‌کند. (۳۰ ، ۲۳) حرکت متحرکی از نقطه ا در امتداد محور ا ا' حرکت می‌کند. (۳۰ ، ۲۲) حرکت متحرکی از نقطه د در امتداد محور د د' حرکت می‌کند. (۳۰ ، ۲۱) حرکت متحرکی از نقطه ه در امتداد محور ه ه' حرکت می‌کند.

تعريف (٢.٣)

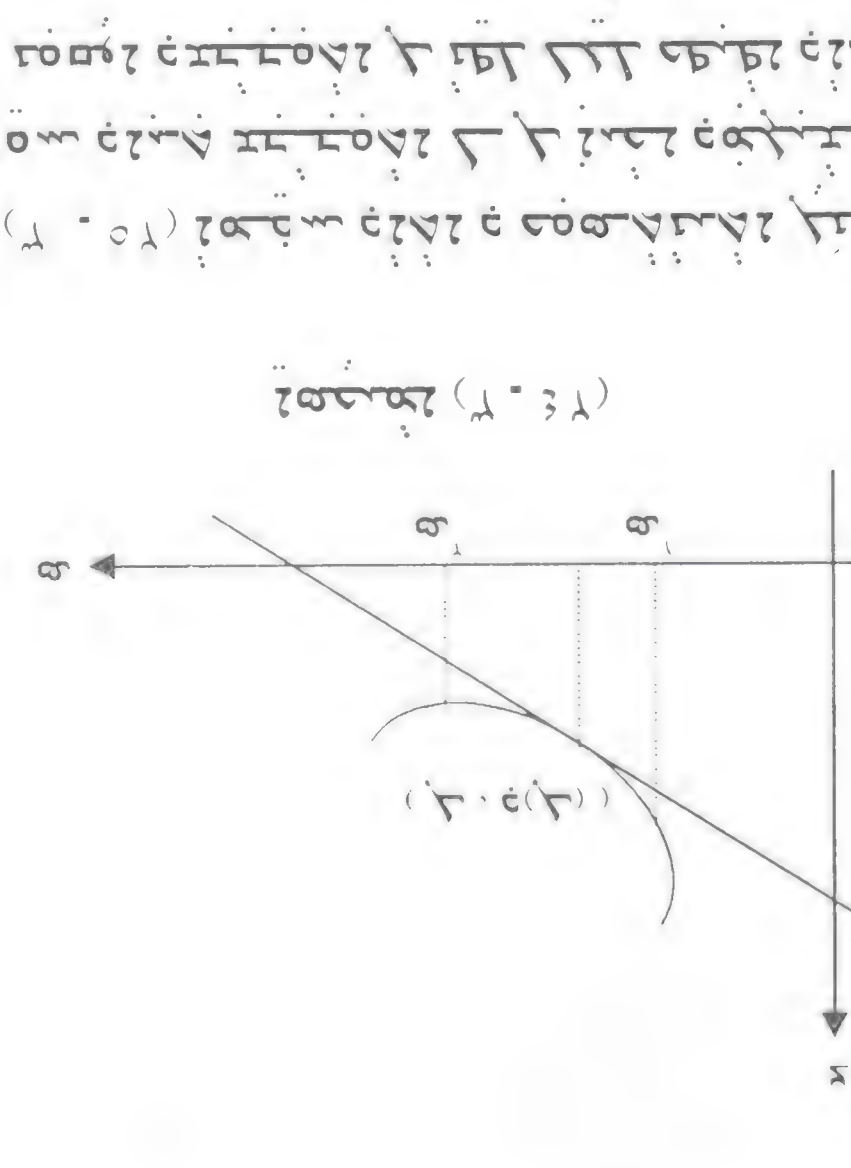
(١) نقول إن للدالة f نهاية عندما x تقترب من a من اليمين تساوي L ونكتب $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إذا كان $a < x < a + \delta$ فإن $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(٢) نقول إن للدالة f نهاية عندما x تقترب من a من اليسار تساوي L ونكتب $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إذا كان $a - \delta < x < a$ فإن $|f(x) - L| < \varepsilon$.



شكل (٢.٣٤)

من الشكل (٢.٣٥) نلاحظ أن $f(x)$ تقترب من L عندما x تقترب من a من اليمين ونرمز لذلك بالرمز $f(a^+)$ ونقرأ $f(a)$ من اليمين تساوي L أو نهاية $f(x)$ عندما x تقترب من a من اليمين تساوي L ونكتب $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$.

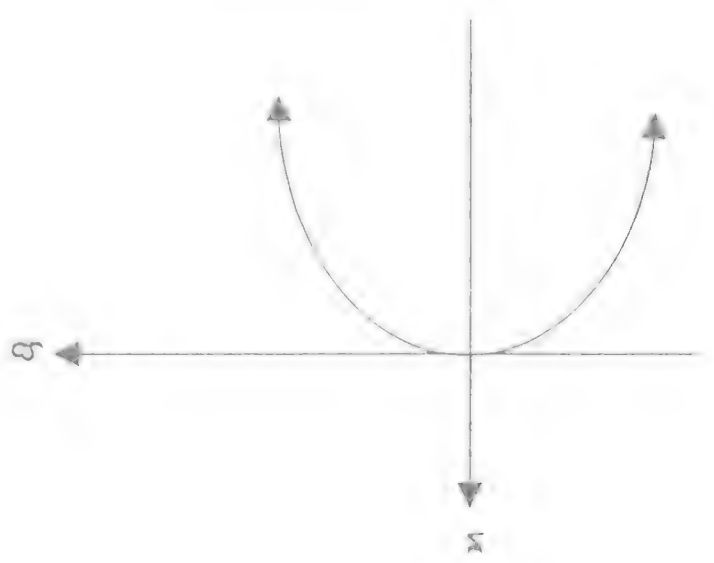


شكل (٢.٣٥)

لـ(ﺱ) = −٢ﺱ يمثل تحويلاً حتى يجب ﺱ يقبل لنهاية وتد وجب لـ (ﺱ) =

−٢ < مقياس لكل ﺱ ∈ ح

وتد وجب ﺟ(ﺱ) < مقياس لكل ﺱ ∈ ح.



إهداف (٣ ، ٢٧)

ولكن يتحدد جل إذا يتوضأ سألاة وجدا ولم حتى يجب

ﺱ يقبل لنهاية وتد وجب سألاة ذلك هنوحا إلى نوسا جوصا

إلى يتوضأ.

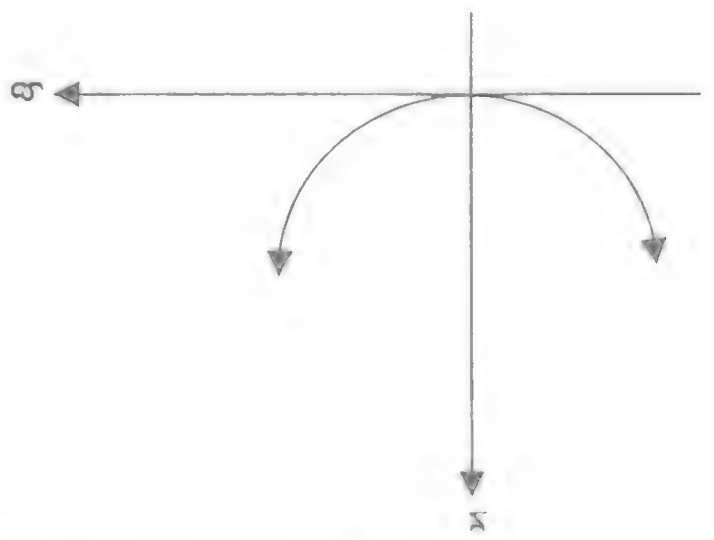
وإذ يحلا جحلها جاذا ﺟ(ﺱ) = − ﺱ٢ حوﺱحا إلى لنه ح. إذا ﺟ(ﺱ) =

إذ يحلا جحلها جاذا ﺟ(ﺱ) = ﺱ٢ يتوضأ إلى ح. إذا ﺟ(ﺱ) ح لـ (ﺱ)

= ٢ وجدا ولم لنه ح حتى :

لـ (ﺱ) = ٢ هنوحا لكل ﺱ ∈ ح

وتد وجب ﺟ(ﺱ) > مقياس لكل ﺱ ∈ ح



إهداف (٣ ، ٢٦)

$\dot{ق}(س) = ٦س - ٤$

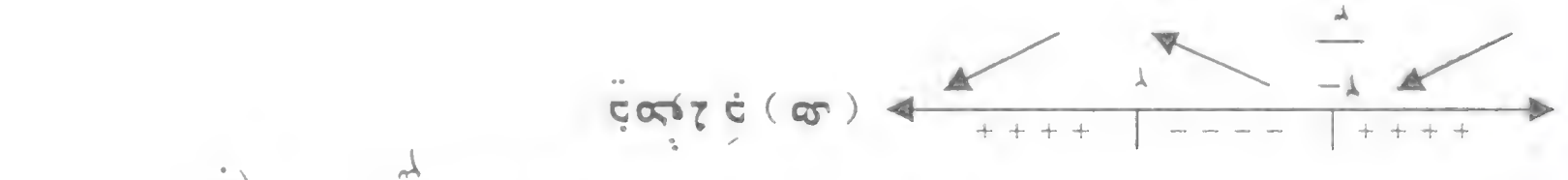
$(٢ ، -٥)$ ومن الواضح رسمياً جزئياً وليتج جيداً

جيداً:::

رسمياً إذاً: $(-\frac{٣}{٢} ، \frac{٢٧}{٢١} ؛)$ ومن الواضح رسمياً جزئياً ثم

في فترة الفرق إن ضمناً $(-\frac{٣}{٢} ، ٢)$

في إجابة الفرق إن $\{س : س > ٢\}$ ، $\{س : س < -\frac{٣}{٢}\}$



$\dot{ق}(س) = ٠ \Leftrightarrow س = \frac{-٣}{٢}$ أو $س = ٢$

$(٣س + ٣)(س - ٢) = ٠$

$٣س^{٢} - ٤س - ٤ = صفر \Leftarrow$

بتعويض $\dot{ق}(س) = صفر$

الحل	$\dot{ق}(س) = ٣س^{٢} - ٤س - ٤$

معادلة المماس الرأسية هي المستقيم

دالة متصلة فترة مغلقة $ق(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٤س + ٣$ | المطلوب (٢٨)

دالة متصلة فترة مغلقة ومحدودة

معادلة المماس الرأسية هي المستقيم

$(ل ، ب)$

$(ب)$ إذا وجد $\dot{ق}(س) <$ صفر لكل $س \in (ل ، ب)$ فإن $ق$ متناقصة على

$(ل ، ب)$

$(ل)$ إذا وجد $\dot{ق}(س) >$ صفر لكل $س \in (ل ، ب)$ فإن $ق$ متزايدة على

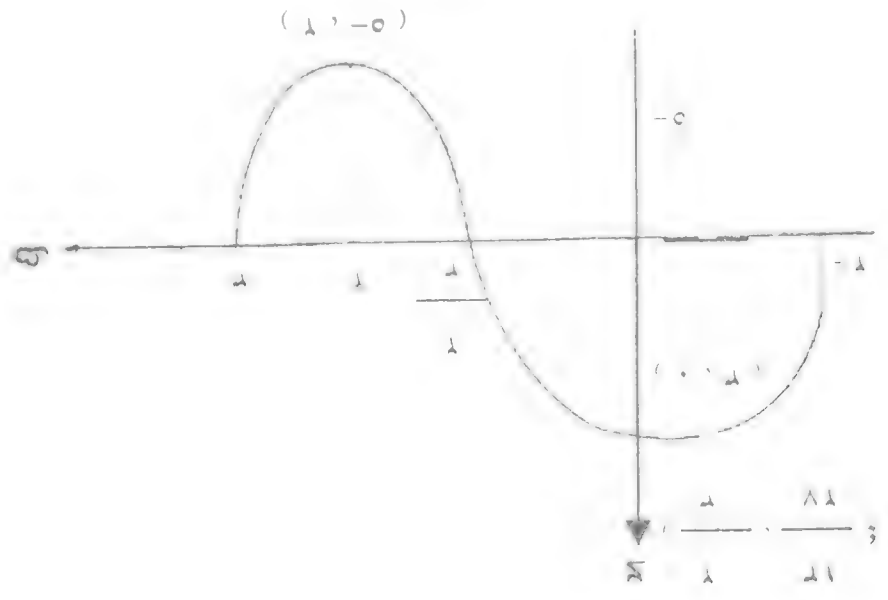
فترة فإن $ق$ تكون متصلة على $(ل ، ب)$ لكل $س \in (ل ، ب)$

المسألة (١١ ، ٢)

دالة متصلة على فترة مغلقة ومحدودة $(ل ، ب)$ فإن لها قيمة عظمى

ومعنى ذلك أن $ق$ تأخذ كل قيمة بين قيمتها العظمى والصغرى

مثال (٢٨ . ٣)



مثال (٢٨ . ٣)

مثال ق(ص) = ٢ص^٣ − ٩ص^٢ − ٢٤ص + ٢٠

أوجد فترات التزايد والتناقص لـ ق ثم أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية لـ ق إن وجدت.

الحل

ق(ص) = ٢ص^٣ − ٩ص^٢ − ٢٤ص + ٢٠

ق'(ص) = ٦ص^٢ − ١٨ص − ٢٤

٦ص^٢ − ١٨ص − ٢٤ = ٠ ⇐ ص = −١ ، ٤

فترة ق(ص)	ص < −١	−١ < ص < ٤	ص > ٤
إشارة ق'(ص)	+	−	+

ق متزايدة في]−∞ ، −١[∪]٤ ، ∞[

ق متناقصة في]−١ ، ٤[

ق(−١) = ٢(−١)^٣ − ٩(−١)^٢ − ٢٤(−١) + ٢٠ = ٣٣ قيمة عظمى محلية

ق(٤) = ٢(٤)^٣ − ٩(٤)^٢ − ٢٤(٤) + ٢٠ = −١٠٠ قيمة صغرى محلية

مثال

أوجد فترات التزايد والتناقص لـ ق(ص) = ص^٣ − ٣ص^٢ + ٣ ثم أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية لـ ق إن وجدت.

الحل

ق(ص) = ص^٣ − ٣ص^٢ + ٣

ق'(ص) = ٣ص^٢ − ٦ص

٣ص^٢ − ٦ص = ٠ ⇐ ص = ٠ ، ٢

فترة ق(ص)	ص < ٠	٠ < ص < ٢	ص > ٢
إشارة ق'(ص)	+	−	+

ق متزايدة في]−∞ ، ٠[∪]٢ ، ∞[

ق متناقصة في]٠ ، ٢[

ق(٠) = ٠^٣ − ٣(٠)^٢ + ٣ = ٣ قيمة عظمى محلية

ق(٢) = ٢^٣ − ٣(٢)^٢ + ٣ = −١ قيمة صغرى محلية

مثال

أوجد فترات التزايد والتناقص لـ ق(ص) = ص^٣ ثم أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية لـ ق إن وجدت.

الحل

ق(ص) = ص^٣

ق'(ص) = ٣ص^٢

٣ص^٢ = ٠ ⇐ ص = ٠

فترة ق(ص)	ص < ٠	ص > ٠
إشارة ق'(ص)	+	+

ق متزايدة في]−∞ ، ∞[

ق(٠) = ٠^٣ = ٠ ليست قيمة عظمى محلية ولا قيمة صغرى محلية

سؤال هوس: إذا كان المشتقة الثانية > ١ وإن المشتقة الأولى $= ٠$ عند $(١، ٠)$ فإن المشتقة الأولى < ٠ عند أي نقطة تقع على يسار $(١، ٠)$ وإن المشتقة الأولى > ٠ عند أي نقطة تقع على يمين $(١، ٠)$ فإن $(١، ٠)$ نقطة صغرى محلية.

مثال (٣٠) إذا كان $ق(س) = (س-٢)^{٢}$ فجد نقاط الصغرى المحلية.

$(س+١)^{٢}$ هي إحداثي المستقيم البياني الذي معادلته

الحل

$$ق(س) = (س-٢)^{٢} \times ٢(س+١) \times ١ + (س+١)^{٢} \times ١$$

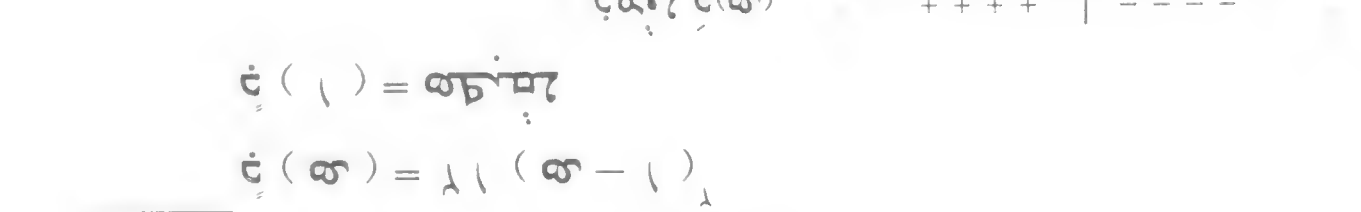
$$= (س+١)(٢س-٤+س+١)$$

$$= (س+١)(٣س-٣)$$

$$ق'(س) = (س+١) \times ٣ + (٣س-٣) \times ١$$

$$= ٣س+٣+٣س-٣$$

$$= ٦س$$



$ق'(١) = صفر$

$ق'(س) = ٣(س-١)^{٢}$

الحل $ق(س) = ٤(س-١)^{٣} \times ١$

المثال (٢٩) إذا كان لديك المعادلة $ق(س) = (س-١)^{٤}$؛ فجد نقاط الصغرى المحلية.

تعلم

لديك الآن طريقة لإيجاد نقاط الصغرى المحلية والعظمى المحلية لاقتران كثير الحدود $ق(س)$ وذلك بإيجاد $ق'(س)$ ثم حل المعادلة $ق'(س) = صفر$ لإيجاد قيم $س$ الحرجة، ثم استخدام اختبار المشتقة الأولى.

ملاحظة

نقطة $(ب، ق(ب))$ تكون نقطة صغرى محلية لاقتران $ق$ إذا وجد فترة مفتوحة $(أ، جـ)$ تحتوي $ب$ بحيث $ق(ب) = صغرى$ مطلقة لاقتران $ق$ على $(أ، جـ)$ فإن $ق(ب)$ تسمى قيمة صغرى محلية.

نقطة $(ب، ق(ب))$ تكون نقطة عظمى محلية لاقتران $ق$ إذا وجد فترة مفتوحة $(أ، جـ)$ تحتوي $ب$ بحيث $ق(ب) = عظمى مطلقة لاقتران ق على (أ، جـ)$ فإن $ق(ب)$ تسمى قيمة عظمى محلية.

$$\text{مشتق } ق(س) = ٠ \Rightarrow ٣س^{٢} - ٦س - ٩ = ٠$$

$$٣(س^{٢} - ٢س - ٣) = ٠ \Rightarrow$$

$$(س - ٣)(س + ١) = ٠$$

$$س = ٣ \quad \text{أو} \quad س = -١$$

الحل

(١) $ق(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٥$

(٢) $ق(٣) = ٣^{٣} - ٣(٣)^{٢} - ٩(٣) + ٥$

(٣) $ق(-١) = (-١)^{٣} - ٣(-١)^{٢} - ٩(-١) + ٥$

مثال (٢) أوجد معادلة ثابت متوسط متصل لكل دالة فيما يلي :

أ) $ق(س) = ٣س^{٢} - ٦س - ٩$

ب) $ق(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$

ج) $ق(س) = \begin{cases} س + ٣ & س < ٣ \\ ٦ & س = ٣ \\ ٩ - س & س > ٣ \end{cases}$

د) $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٩ & س \neq ٣ \\ ٦ & س = ٣ \end{cases}$

هـ) $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & س \neq ٣ \\ ٦ & س = ٣ \end{cases}$

الحل

أ) $ق(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٥$ دالة متصلة على ح

ب) $ق(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$ دالة نسبية مقامها $\neq ٠$ عندما $س \neq ٣$

$\therefore$ ق متصلة على $ح - \{٣\}$

ج) $ق(س) = \begin{cases} س + ٣ & س < ٣ \\ ٦ & س = ٣ \\ ٩ - س & س > ٣ \end{cases}$

$\therefore$ ق متصلة على $ح - \{٣\}$

د) $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٩ & س \neq ٣ \\ ٦ & س = ٣ \end{cases}$

$\therefore$ ق متصلة على $ح - \{٣\}$

هـ) $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & س \neq ٣ \\ ٦ & س = ٣ \end{cases}$

$\therefore$ ق متصلة على ح

متباينات القيمة المطلقة

مثال (١) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $|س| < ٣$

ب) $|س| \leq ٣$

ج) $|س| > ٣$

د) $|س| \geq ٣$

الحل

أ) $|س| < ٣ \Rightarrow -٣ < س < ٣$

ب) $|س| \leq ٣ \Rightarrow -٣ \leq س \leq ٣$

ج) $|س| > ٣ \Rightarrow س < -٣$ أو $س > ٣$

د) $|س| \geq ٣ \Rightarrow س \leq -٣$ أو $س \geq ٣$

مثال (٢) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $|س - ٢| < ٥$

ب) $|س - ٢| \leq ٥$

ج) $|س - ٢| > ٥$

د) $|س - ٢| \geq ٥$

الحل

أ) $|س - ٢| < ٥ \Rightarrow -٥ < س - ٢ < ٥$

$\Rightarrow -٣ < س < ٧$

ب) $|س - ٢| \leq ٥ \Rightarrow -٥ \leq س - ٢ \leq ٥$

$\Rightarrow -٣ \leq س \leq ٧$

ج) $|س - ٢| > ٥ \Rightarrow س - ٢ < -٥$ أو $س - ٢ > ٥$

$\Rightarrow س < -٣$ أو $س > ٧$

د) $|س - ٢| \geq ٥ \Rightarrow س - ٢ \leq -٥$ أو $س - ٢ \geq ٥$

$\Rightarrow س \leq -٣$ أو $س \geq ٧$

مثال (٣) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $|٢س + ٣| < ٥$

ب) $|٢س + ٣| \leq ٥$

ج) $|٢س + ٣| > ٥$

د) $|٢س + ٣| \geq ٥$

الحل

أ) $|٢س + ٣| < ٥ \Rightarrow -٥ < ٢س + ٣ < ٥$

$\Rightarrow -٨ < ٢س < ٢$

$\Rightarrow -٤ < س < ١$

ب) $|٢س + ٣| \leq ٥ \Rightarrow -٥ \leq ٢س + ٣ \leq ٥$

$\Rightarrow -٨ \leq ٢س \leq ٢$

$\Rightarrow -٤ \leq س \leq ١$

ج) $|٢س + ٣| > ٥ \Rightarrow ٢س + ٣ < -٥$ أو $٢س + ٣ > ٥$

$\Rightarrow ٢س < -٨$ أو $٢س > ٢$

$\Rightarrow س < -٤$ أو $س > ١$

د) $|٢س + ٣| \geq ٥ \Rightarrow ٢س + ٣ \leq -٥$ أو $٢س + ٣ \geq ٥$

$\Rightarrow ٢س \leq -٨$ أو $٢س \geq ٢$

$\Rightarrow س \leq -٤$ أو $س \geq ١$

تمرين (٢)

١) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $|س| < ٤$

ب) $|س| \leq ٤$

ج) $|س| > ٤$

د) $|س| \geq ٤$

٢) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $|س - ٣| < ٢$

ب) $|س - ٣| \leq ٢$

ج) $|س - ٣| > ٢$

د) $|س - ٣| \geq ٢$

٣) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $|٣س + ٢| < ٤$

ب) $|٣س + ٢| \leq ٤$

ج) $|٣س + ٣| > ٤$

د) $|٣س + ٣| \geq ٤$

متباينات من الدرجة الثانية

مثال (١) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $س^{٢} - ٣س - ١٠ < ٠$

ب) $س^{٢} - ٣س - ١٠ \leq ٠$

ج) $س^{٢} - ٣س - ١٠ > ٠$

د) $س^{٢} - ٣س - ١٠ \geq ٠$

الحل

$ق(س) = س^{٢} - ٣س - ١٠ = (س - ٥)(س + ٢)$

$ق(س) = ٠ \Rightarrow س = ٥$ أو $س = -٢$

	-٢		٥	
$ق(س)$	$+$	٠	$-$	٠	$+$

أ) $س^{٢} - ٣س - ١٠ < ٠ \Rightarrow -٢ < س < ٥$

ب) $س^{٢} - ٣س - ١٠ \leq ٠ \Rightarrow -٢ \leq س \leq ٥$

ج) $س^{٢} - ٣س - ١٠ > ٠ \Rightarrow س < -٢$ أو $س > ٥$

د) $س^{٢} - ٣س - ١٠ \geq ٠ \Rightarrow س \leq -٢$ أو $س \geq ٥$

مثال (٢) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $س^{٢} + ٤س + ٣ < ٠$

ب) $س^{٢} + ٤س + ٣ \leq ٠$

ج) $س^{٢} + ٤س + ٣ > ٠$

د) $س^{٢} + ٤س + ٣ \geq ٠$

الحل

$ق(س) = س^{٢} + ٤س + ٣ = (س + ١)(س + ٣)$

$ق(س) = ٠ \Rightarrow س = -١$ أو $س = -٣$

	-٣		-١	
$ق(س)$	$+$	٠	$-$	٠	$+$

أ) $س^{٢} + ٤س + ٣ < ٠ \Rightarrow -٣ < س < -١$

ب) $س^{٢} + ٤س + ٣ \leq ٠ \Rightarrow -٣ \leq س \leq -١$

ج) $س^{٢} + ٤س + ٣ > ٠ \Rightarrow س < -٣$ أو $س > -١$

د) $س^{٢} + ٤س + ٣ \geq ٠ \Rightarrow س \leq -٣$ أو $س \geq -١$

مثال (٣) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $س^{٢} + ٤س + ٤ < ٠$

ب) $س^{٢} + ٤س + ٤ \leq ٠$

ج) $س^{٢} + ٤س + ٤ > ٠$

د) $س^{٢} + ٤س + ٤ \geq ٠$

الحل

$ق(س) = س^{٢} + ٤س + ٤ = (س + ٢)^{٢}$

$ق(س) = ٠ \Rightarrow س = -٢$

	-٢	
$ق(س)$	$+$	٠	$+$

أ) $س^{٢} + ٤س + ٤ < ٠ \Rightarrow$ لا يوجد حل

ب) $س^{٢} + ٤س + ٤ \leq ٠ \Rightarrow س = -٢$

ج) $س^{٢} + ٤س + ٤ > ٠ \Rightarrow س \neq -٢$

د) $س^{٢} + ٤س + ٤ \geq ٠ \Rightarrow$ ح

مثال (٤) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $س^{٢} + ٢س + ٥ < ٠$

ب) $س^{٢} + ٢س + ٥ \leq ٠$

ج) $س^{٢} + ٢س + ٥ > ٠$

د) $س^{٢} + ٢س + ٥ \geq ٠$

الحل

$ق(س) = س^{٢} + ٢س + ٥$

$\Delta = ٢^{٢} - ٤(١)(٥) = -١٦ < ٠$

$\therefore$ ق(س) لها نفس إشارة $أ$ لكل $س \in ح$

$\therefore ق(س) > ٠$ لكل $س \in ح$

أ) $س^{٢} + ٢س + ٥ < ٠ \Rightarrow$ لا يوجد حل

ب) $س^{٢} + ٢س + ٥ \leq ٠ \Rightarrow$ لا يوجد حل

ج) $س^{٢} + ٢س + ٥ > ٠ \Rightarrow س \in ح$

د) $س^{٢} + ٢س + ٥ \geq ٠ \Rightarrow س \in ح$

تمرين (٣)

١) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $س^{٢} - ٢س - ٨ < ٠$

ب) $س^{٢} - ٢س - ٨ \leq ٠$

ج) $س^{٢} - ٢س - ٨ > ٠$

د) $س^{٢} - ٢س - ٨ \geq ٠$

٢) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $س^{٢} + ٣س + ٢ < ٠$

ب) $س^{٢} + ٣س + ٢ \leq ٠$

ج) $س^{٢} + ٣س + ٢ > ٠$

د) $س^{٢} + ٣س + ٢ \geq ٠$

٣) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $س^{٢} + ٦س + ٩ < ٠$

ب) $س^{٢} + ٦س + ٩ \leq ٠$

ج) $س^{٢} + ٦س + ٩ > ٠$

د) $س^{٢} + ٦س + ٩ \geq ٠$

٤) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $س^{٢} + ٢س + ٢ < ٠$

ب) $س^{٢} + ٢س + ٢ \leq ٠$

ج) $س^{٢} + ٢س + ٢ > ٠$

د) $س^{٢} + ٢س + ٢ \geq ٠$

متباينات من الدرجة الثالثة

مثال (١) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٢٧ < ٠$

ب) $س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٢٧ \leq ٠$

ج) $س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٢٧ > ٠$

د) $س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٢٧ \geq ٠$

الحل

$ق(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٢٧$

$= س^{٢}(س - ٣) - ٩(س - ٣)$

$= (س - ٣)(س^{٢} - ٩)$

$= (س - ٣)(س - ٣)(س + ٣)$

$= (س - ٣)^{٢}(س + ٣)$

$ق(س) = ٠ \Rightarrow س = ٣$ أو $س = -٣$

	-٣		٣	
$ق(س)$	$-$	٠	$+$	٠	$+$

أ) $س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٢٧ < ٠ \Rightarrow س < -٣$

ب) $س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٢٧ \leq ٠ \Rightarrow س \leq -٣$ أو $س = ٣$

ج) $س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٢٧ > ٠ \Rightarrow -٣ < س < ٣$ أو $س > ٣$

د) $س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٢٧ \geq ٠ \Rightarrow س \geq -٣$

مثال (٢) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢ < ٠$

ب) $س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢ \leq ٠$

ج) $س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢ > ٠$

د) $س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢ \geq ٠$

الحل

$ق(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢$

$= س^{٢}(س + ٣) - ٤(س + ٣)$

$= (س + ٣)(س^{٢} - ٤)$

$= (س + ٣)(س - ٢)(س + ٢)$

$ق(س) = ٠ \Rightarrow س = -٣$ أو $س = -٢$ أو $س = ٢$

	-٣		-٢		٢	
$ق(س)$	$-$	٠	$+$	٠	$-$	٠	$+$

أ) $س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢ < ٠ \Rightarrow س < -٣$ أو $-٢ < س < ٢$

ب) $س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢ \leq ٠ \Rightarrow س \leq -٣$ أو $-٢ \leq س \leq ٢$

ج) $س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢ > ٠ \Rightarrow -٣ < س < -٢$ أو $س > ٢$

د) $س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢ \geq ٠ \Rightarrow -٣ \leq س \leq -٢$ أو $س \geq ٢$

تمرين (٤)

١) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $س^{٣} - ٤س^{٢} + س + ٦ < ٠$

ب) $س^{٣} - ٤س^{٢} + س + ٦ \leq ٠$

ج) $س^{٣} - ٤س^{٢} + س + ٦ > ٠$

د) $س^{٣} - ٤س^{٢} + س + ٦ \geq ٠$

٢) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $س^{٣} + ٢س^{٢} - ٥س - ٦ < ٠$

ب) $س^{٣} + ٢س^{٢} - ٥س - ٦ \leq ٠$

ج) $س^{٣} + ٢س^{٢} - ٥س - ٦ > ٠$

د) $س^{٣} + ٢س^{٢} - ٥س - ٦ \geq ٠$

٣) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س - ١ < ٠$

ب) $س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س - ١ \leq ٠$

ج) $س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س - ١ > ٠$

د) $س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س - ١ \geq ٠$

متباينات من الدرجة الرابعة

مثال (١) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $س^{٤} - ٥س^{٢} + ٤ < ٠$

ب) $س^{٤} - ٥س^{٢} + ٤ \leq ٠$

ج) $س^{٤} - ٥س^{٢} + ٤ > ٠$

د) $س^{٤} - ٥س^{٢} + ٤ \geq ٠$

الحل

$ق(س) = س^{٤} - ٥س^{٢} + ٤$

$= (س^{٢} - ١)(س^{٢} - ٤)$

$= (س - ١)(س + ١)(س - ٢)(س + ٢)$

$ق(س) = ٠ \Rightarrow س = ١$ أو $س = -١$ أو $س = ٢$ أو $س = -٢$

	-٢		-١		١		٢	
$ق(س)$	$+$	٠	$-$	٠	$+$	٠	$-$	٠	$+$

أ) $س^{٤} - ٥س^{٢} + ٤ < ٠ \Rightarrow -٢ < س < -١$ أو $١ < س < ٢$

ب) $س^{٤} - ٥س^{٢} + ٤ \leq ٠ \Rightarrow -٢ \leq س \leq -١$ أو $١ \leq س \leq ٢$

ج) $س^{٤} - ٥س^{٢} + ٤ > ٠ \Rightarrow س < -٢$ أو $-١ < س < ١$ أو $س > ٢$

د) $س^{٤} - ٥س^{٢} + ٤ \geq ٠ \Rightarrow س \leq -٢$ أو $-١ \leq س \leq ١$ أو $س \geq ٢$

مثال (٢) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $س^{٤} + ٣س^{٢} - ٤ < ٠$

ب) $س^{٤} + ٣س^{٢} - ٤ \leq ٠$

ج) $س^{٤} + ٣س^{٢} - ٤ > ٠$

د) $س^{٤} + ٣س^{٢} - ٤ \geq ٠$

الحل

$ق(س) = س^{٤} + ٣س^{٢} - ٤$

$= (س^{٢} + ٤)(س^{٢} - ١)$

$= (س^{٢} + ٤)(س - ١)(س + ١)$

$ق(س) = ٠ \Rightarrow س = ١$ أو $س = -١$

	-١		١	
$ق(س)$	$-$	٠	$+$	٠	$+$

أ) $س^{٤} + ٣س^{٢} - ٤ < ٠ \Rightarrow -١ < س < ١$

ب) $س^{٤} + ٣س^{٢} - ٤ \leq ٠ \Rightarrow -١ \leq س \leq ١$

ج) $س^{٤} + ٣س^{٢} - ٤ > ٠ \Rightarrow س < -١$ أو $س > ١$

د) $س^{٤} + ٣س^{٢} - ٤ \geq ٠ \Rightarrow س \leq -١$ أو $س \geq ١$

تمرين (٥)

١) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $س^{٤} - ١٣س^{٢} + ٣٦ < ٠$

ب) $س^{٤} - ١٣س^{٢} + ٣٦ \leq ٠$

ج) $س^{٤} - ١٣س^{٢} + ٣٦ > ٠$

د) $س^{٤} - ١٣س^{٢} + ٣٦ \geq ٠$

٢) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $س^{٤} - ٢س^{٢} - ٨ < ٠$

ب) $س^{٤} - ٢س^{٢} - ٨ \leq ٠$

ج) $س^{٤} - ٢س^{٢} - ٨ > ٠$

د) $س^{٤} - ٢س^{٢} - ٨ \geq ٠$

٣) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $س^{٤} + ٣س^{٢} + ٢ < ٠$

ب) $س^{٤} + ٣س^{٢} + ٢ \leq ٠$

ج) $س^{٤} + ٣س^{٢} + ٢ > ٠$

د) $س^{٤} + ٣س^{٢} + ٢ \geq ٠$

متباينات كسرية

مثال (١) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $\frac{س - ٣}{س + ٢} < ٠$

ب) $\frac{س - ٣}{س + ٢} \leq ٠$

ج) $\frac{س - ٣}{س + ٢} > ٠$

د) $\frac{س - ٣}{س + ٢} \geq ٠$

الحل

$ق(س) = \frac{س - ٣}{س + ٢}$

$ق(س) = ٠ \Rightarrow س = ٣$

$ق(س)$ غير معرفة عندما $س = -٢$

	-٢		٣	
$ق(س)$	$+$	غ م	$-$	٠	$+$

أ) $\frac{س - ٣}{س + ٢} < ٠ \Rightarrow -٢ < س < ٣$

ب) $\frac{س - ٣}{س + ٢} \leq ٠ \Rightarrow -٢ < س \leq ٣$

ج) $\frac{س - ٣}{س + ٢} > ٠ \Rightarrow س < -٢$ أو $س > ٣$

د) $\frac{س - ٣}{س + ٢} \geq ٠ \Rightarrow س < -٢$ أو $س \geq ٣$

مثال (٢) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $\frac{س^{٢} - ٣س - ١٠}{س - ٣} < ٠$

ب) $\frac{س^{٢} - ٣س - ١٠}{س - ٣} \leq ٠$

ج) $\frac{س^{٢} - ٣س - ١٠}{س - ٣} > ٠$

د) $\frac{س^{٢} - ٣س - ١٠}{س - ٣} \geq ٠$

الحل

$ق(س) = \frac{س^{٢} - ٣س - ١٠}{س - ٣} = \frac{(س - ٥)(س + ٢)}{س - ٣}$

$ق(س) = ٠ \Rightarrow س = ٥$ أو $س = -٢$

$ق(س)$ غير معرفة عندما $س = ٣$

	-٢		٣		٥	
$ق(س)$	$-$	٠	$+$	غ م	$-$	٠	$+$

أ) $\frac{س^{٢} - ٣س - ١٠}{س - ٣} < ٠ \Rightarrow س < -٢$ أو $٣ < س < ٥$

ب) $\frac{س^{٢} - ٣س - ١٠}{س - ٣} \leq ٠ \Rightarrow س \leq -٢$ أو $٣ < س \leq ٥$

ج) $\frac{س^{٢} - ٣س - ١٠}{س - ٣} > ٠ \Rightarrow -٢ < س < ٣$ أو $س > ٥$

د) $\frac{س^{٢} - ٣س - ١٠}{س - ٣} \geq ٠ \Rightarrow -٢ \leq س < ٣$ أو $س \geq ٥$

تمرين (٦)

١) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $\frac{س - ٢}{س + ٣} < ٠$

ب) $\frac{س - ٢}{س + ٣} \leq ٠$

ج) $\frac{س - ٢}{س + ٣} > ٠$

د) $\frac{س - ٢}{س + ٣} \geq ٠$

٢) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $\frac{س^{٢} - ٢س - ٨}{س - ٢} < ٠$

ب) $\frac{س^{٢} - ٢س - ٨}{س - ٢} \leq ٠$

ج) $\frac{س^{٢} - ٢س - ٨}{س - ٢} > ٠$

د) $\frac{س^{٢} - ٢س - ٨}{س - ٢} \geq ٠$

٣) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $\frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{س + ١} < ٠$

ب) $\frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{س + ١} \leq ٠$

ج) $\frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{س + ١} > ٠$

د) $\frac{س^{٢} + ٣س + ٢}{س + ١} \geq ٠$

٤) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $\frac{س^{٢} + ٦س + ٩}{س + ٣} < ٠$

ب) $\frac{س^{٢} + ٦س + ٩}{س + ٣} \leq ٠$

ج) $\frac{س^{٢} + ٦س + ٩}{س + ٣} > ٠$

د) $\frac{س^{٢} + ٦س + ٩}{س + ٣} \geq ٠$

٥) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $\frac{س^{٢} + ٢س + ٢}{س + ٢} < ٠$

ب) $\frac{س^{٢} + ٢س + ٢}{س + ٢} \leq ٠$

ج) $\frac{س^{٢} + ٢س + ٢}{س + ٢} > ٠$

د) $\frac{س^{٢} + ٢س + ٢}{س + ٢} \geq ٠$

متباينات كسرية من الدرجة الثالثة

مثال (١) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $\frac{س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٢٧}{س + ٣} < ٠$

ب) $\frac{س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٢٧}{س + ٣} \leq ٠$

ج) $\frac{س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٢٧}{س + ٣} > ٠$

د) $\frac{س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٢٧}{س + ٣} \geq ٠$

الحل

$ق(س) = \frac{س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٢٧}{س + ٣} = \frac{(س - ٣)^{٢}(س + ٣)}{س + ٣}$

$= (س - ٣)^{٢}$ حيث $س \neq -٣$

$ق(س) = ٠ \Rightarrow س = ٣$

$ق(س)$ غير معرفة عندما $س = -٣$

	-٣		٣	
$ق(س)$	غ م		$+$	٠	$+$

أ) $\frac{س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٢٧}{س + ٣} < ٠ \Rightarrow$ لا يوجد حل

ب) $\frac{س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٢٧}{س + ٣} \leq ٠ \Rightarrow س = ٣$

ج) $\frac{س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٢٧}{س + ٣} > ٠ \Rightarrow س > -٣$ ، $س \neq ٣$

د) $\frac{س^{٣} - ٣س^{٢} - ٩س + ٢٧}{س + ٣} \geq ٠ \Rightarrow س > -٣$

مثال (٢) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $\frac{س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢}{س + ٢} < ٠$

ب) $\frac{س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢}{س + ٢} \leq ٠$

ج) $\frac{س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢}{س + ٢} > ٠$

د) $\frac{س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢}{س + ٢} \geq ٠$

الحل

$ق(س) = \frac{س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢}{س + ٢} = \frac{(س + ٣)(س - ٢)(س + ٢)}{س + ٢}$

$= (س + ٣)(س - ٢)$ حيث $س \neq -٢$

$ق(س) = ٠ \Rightarrow س = -٣$ أو $س = ٢$

$ق(س)$ غير معرفة عندما $س = -٢$

	-٣		-٢		٢	
$ق(س)$	$+$	٠	$-$	غ م	$+$	٠	$+$

أ) $\frac{س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢}{س + ٢} < ٠ \Rightarrow س < -٣$ أو $-٢ < س < ٢$

ب) $\frac{س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢}{س + ٢} \leq ٠ \Rightarrow س \leq -٣$ أو $-٢ < س \leq ٢$

ج) $\frac{س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢}{س + ٢} > ٠ \Rightarrow -٣ < س < -٢$ أو $س > ٢$

د) $\frac{س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س - ١٢}{س + ٢} \geq ٠ \Rightarrow -٣ \leq س < -٢$ أو $س \geq ٢$

تمرين (٧)

١) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $\frac{س^{٣} - ٤س^{٢} + س + ٦}{س - ٢} < ٠$

ب) $\frac{س^{٣} - ٤س^{٢} + س + ٦}{س - ٢} \leq ٠$

ج) $\frac{س^{٣} - ٤س^{٢} + س + ٦}{س - ٢} > ٠$

د) $\frac{س^{٣} - ٤س^{٢} + س + ٦}{س - ٢} \geq ٠$

٢) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $\frac{س^{٣} + ٢س^{٢} - ٥س - ٦}{س + ٣} < ٠$

ب) $\frac{س^{٣} + ٢س^{٢} - ٥س - ٦}{س + ٣} \leq ٠$

ج) $\frac{س^{٣} + ٢س^{٢} - ٥س - ٦}{س + ٣} > ٠$

د) $\frac{س^{٣} + ٢س^{٢} - ٥س - ٦}{س + ٣} \geq ٠$

٣) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $\frac{س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س - ١}{س - ١} < ٠$

ب) $\frac{س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س - ١}{س - ١} \leq ٠$

ج) $\frac{س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س - ١}{س - ١} > ٠$

د) $\frac{س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س - ١}{س - ١} \geq ٠$

متباينات كسرية من الدرجة الرابعة

مثال (١) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $\frac{س^{٤} - ٥س^{٢} + ٤}{س + ٢} < ٠$

ب) $\frac{س^{٤} - ٥س^{٢} + ٤}{س + ٢} \leq ٠$

ج) $\frac{س^{٤} - ٥س^{٢} + ٤}{س + ٢} > ٠$

د) $\frac{س^{٤} - ٥س^{٢} + ٤}{س + ٢} \geq ٠$

الحل

$ق(س) = \frac{س^{٤} - ٥س^{٢} + ٤}{س + ٢} = \frac{(س^{٢} - ١)(س^{٢} - ٤)}{س + ٢}$

$= \frac{(س - ١)(س + ١)(س - ٢)(س + ٢)}{س + ٢}$

$= (س - ١)(س + ١)(س - ٢)$ حيث $س \neq -٢$

$ق(س) = ٠ \Rightarrow س = ١$ أو $س = -١$ أو $س = ٢$

$ق(س)$ غير معرفة عندما $س = -٢$

	-٢		-١		١		٢	
$ق(س)$	$+$	غ م	$-$	٠	$+$	٠	$-$	٠	$+$

أ) $\frac{س^{٤} - ٥س^{٢} + ٤}{س + ٢} < ٠ \Rightarrow س < -٢$ أو $-١ < س < ١$ أو $٢ < س < ٢$

ب) $\frac{س^{٤} - ٥س^{٢} + ٤}{س + ٢} \leq ٠ \Rightarrow -٢ < س \leq -١$ أو $١ \leq س \leq ٢$

ج) $\frac{س^{٤} - ٥س^{٢} + ٤}{س + ٢} > ٠ \Rightarrow -٢ < س < -١$ أو $١ < س < ٢$ أو $س > ٢$

د) $\frac{س^{٤} - ٥س^{٢} + ٤}{س + ٢} \geq ٠ \Rightarrow -٢ < س \leq -١$ أو $١ \leq س \leq ٢$ أو $س \geq ٢$

مثال (٢) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $\frac{س^{٤} + ٣س^{٢} - ٤}{س + ١} < ٠$

ب) $\frac{س^{٤} + ٣س^{٢} - ٤}{س + ١} \leq ٠$

ج) $\frac{س^{٤} + ٣س^{٢} - ٤}{س + ١} > ٠$

د) $\frac{س^{٤} + ٣س^{٢} - ٤}{س + ١} \geq ٠$

الحل

$ق(س) = \frac{س^{٤} + ٣س^{٢} - ٤}{س + ١} = \frac{(س^{٢} + ٤)(س^{٢} - ١)}{س + ١}$

$= \frac{(س^{٢} + ٤)(س - ١)(س + ١)}{س + ١}$

$= (س^{٢} + ٤)(س - ١)$ حيث $س \neq -١$

$ق(س) = ٠ \Rightarrow س = ١$ أو $س = -١$

$ق(س)$ غير معرفة عندما $س = -١$

	-١		١	
$ق(س)$	غ م		$+$	٠	$+$

أ) $\frac{س^{٤} + ٣س^{٢} - ٤}{س + ١} < ٠ \Rightarrow$ لا يوجد حل

ب) $\frac{س^{٤} + ٣س^{٢} - ٤}{س + ١} \leq ٠ \Rightarrow س = ١$

ج) $\frac{س^{٤} + ٣س^{٢} - ٤}{س + ١} > ٠ \Rightarrow س > -١$ ، $س \neq ١$

د) $\frac{س^{٤} + ٣س^{٢} - ٤}{س + ١} \geq ٠ \Rightarrow س > -١$

تمرين (٨)

١) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $\frac{س^{٤} - ١٣س^{٢} + ٣٦}{س - ٣} < ٠$

ب) $\frac{س^{٤} - ١٣س^{٢} + ٣٦}{س - ٣} \leq ٠$

ج) $\frac{س^{٤} - ١٣س^{٢} + ٣٦}{س - ٣} > ٠$

د) $\frac{س^{٤} - ١٣س^{٢} + ٣٦}{س - ٣} \geq ٠$

٢) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $\frac{س^{٤} - ٢س^{٢} - ٨}{س - ٢} < ٠$

ب) $\frac{س^{٤} - ٢س^{٢} - ٨}{س - ٢} \leq ٠$

ج) $\frac{س^{٤} - ٢س^{٢} - ٨}{س - ٢} > ٠$

د) $\frac{س^{٤} - ٢س^{٢} - ٨}{س - ٢} \geq ٠$

٣) أوجد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية :

أ) $\frac{س^{٤} + ٣س^{٢} + ٢}{س + ٢} < ٠$

ب) $\frac{س^{٤} + ٣س^{٢} + ٢}{س + ٢} \leq ٠$

ج) $\frac{س^{٤} + ٣س^{٢} + ٢}{س + ٢} > ٠$

د) $\frac{س^{٤} + ٣س^{٢} + ٢}{س + ٢} \geq ٠$

٢) هَسِبِ جِذَاءَ لَـهَالَةِ مَوْلَةِ تَحْتَ جِوَحَدَاتِ حَتَى جِوْضِعِ مَوْضِعَاءَ ل .

١) لِإِحْسِبِ مَوْضِعَاءَ ل إِذَا لِعِلَمْتَ رَوْسِعَاءَ جِمَوْلَةِ لَهَتَ هـ = ١

ل ∈ ح (هَلَهـلَاءَ) ، هـ ≠ ٠ ، ل ≠ ٠

هَلَوْظَةٌ (٢٣) مَتَوْمَ جِوْضِعَاءَ جـ(هـ) = هـ^{٢} + $\frac{هـ}{ل}$ جِهـ

∵ جـ(٠) = ٠ مَوْلَةِ وِلَهَةٍ جِوَحَدَاتِ

جِ وِعِجِرَاءَ ٨ هـ > ٠ ، حَتِّجَرَاءَ ٨ هـ < ٠

جِهَةِ جـ(هـ) 

جـ(٠) = ٠ (لِوَضْعِ لَا هَلَهـلَاءَ)

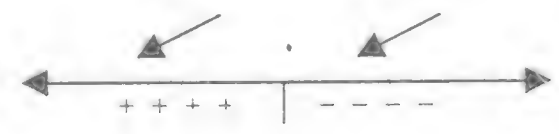
مَتَوْمَ جـ(هـ) = ٠ ⇒ هـ = ٠

جـ(هـ) = ٤ هـ^{٣} ، جـ(هـ) = ١٢ هـ^{٢} (٢)

∵ لَـهَ رَوْسِعَاءَ جِمَوْلَةِ لَهَتَ هـ = ٠

وَلِهَ جِوْضِعَاءَ لَهَ ٨ هـ > ٠

جِ وِعِجِرَاءَ لَهَ ٨ هـ < ٠



جـ(٠) = هَقِيمَةٌ (لِوَضْعِ لَا هَلَهـلَاءَ)

جـ(هـ) = ٦ هـ

∵ ٣ هـ^{٢} = هَقِيمَةٌ ⇒ هـ = هَقِيمَةٌ

مَتَوْمَ جـ(هـ) = هَقِيمَةٌ

(٢) جـ(هـ) = ٣ هـ^{٢}

∵ جـ (−١) مَوْلَةِ جَذَ جِوَحَدَاتِ

جـ(−١) = − ٦ − ٦ = − ٢١ < هَقِيمَةٌ

∵ جـ(٣) مَوْلَةِ وِلَهَةٍ جِوَحَدَاتِ

جـ(٣) = ٨١ − ٦ = ٦ > هَقِيمَةٌ

جـ(هـ) = ٦ هـ − ٦

مَ هـ = ٣ لِهَ هـ = −١

٣ (هـ − ٣) (هـ + ١) = هَقِيمَةٌ

$$\therefore \text{ لما توجد قيمة حرجة وحيدة لـ } س = \sqrt[٣]{\frac{٢}{٢}} = ١$$

$$\therefore \text{ لما توجد قيمة وحيدة لـ } س \text{ تجعل } ص \text{ أكبر ما يمكن}$$

$$\text{ص} = ٢ + ٤ = ٦ > \text{صغيرة}$$

$$= ٢ + \frac{٤}{\frac{٢٧}{٢}} = ٢ + \frac{٤}{\frac{٢}{٣}} = ٢ + \frac{٤}{\frac{٢}{٣}}$$

$$\text{ص} = ٢ + \frac{٤}{\sqrt[٣]{(\frac{٢}{٣})^{٢}}} + \frac{٢}{٣}$$

$$\text{ص} = ٢ + \frac{٤}{\sqrt[٣]{\frac{٤}{٩}}} + \frac{٢}{٣}$$

$$\text{ص} = ٢ + \frac{٤}{\frac{٢}{٣}\sqrt[٣]{٢

تمرين ٣ - ٧

أوجد معادلة المماس والعمودي لكل من المنحنيات الآتية عند النقطة المعطاة :

١) $ص = س^{٣} - ٨س + ٢١$ عند $س = -١$

٢) $ص = ٨ + ٨س - س^{٢}$ عند $س = ٣$

٣) $ص = س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤٣س + ٢$ عند $س = ٤$

٤) $ص = س^{٣}(٤ - س)$ عند $س = ٤$

٥) $ص = س^{٤} - ٢س^{٢} + ١$ عند $س = ٣$

٦) $ص = ٥ - س^{٥}$ عند $س = ١$

٧) $ص = \frac{س}{١}$ عند $س \neq ٠$ ، $ص(١)$: أوجد معادلة $ص(س)$ المماس لمنحنى الدالة $ص$ عند $س = ١$ ، $س \in ح$ (مجالها)، ثم أوجد معادلة العمودي لمنحنى الدالة.

٨) $ص(س) = س^{٣} + ٢س^{٢} + ك س$ عند $س = ٢$ ، $ك \in ح$ (مجالها) ثم أوجد قيمة $ك$ إذا كان المماس يوازي المستقيم $ل : ٥س - ص + ٢ = ٠$

٩) $ص(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + ٣س$ عند $س = ١$ ، $ك \in ح$ (مجالها) ثم أوجد قيمة $ك$ إذا كان المماس يوازي المستقيم $ل : ٥س - ص + ٢ = ٠$

١٠) $ص(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + ٣س$ عند $س = ١$ ، $ك \in ح$ (مجالها) ثم أوجد قيمة $ك$ إذا كان المماس يوازي المستقيم $ل : ٥س - ص + ٢ = ٠$

١١) $ص(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + ٣س$ عند $س = ١$ ، $ك \in ح$ (مجالها) ثم أوجد قيمة $ك$ إذا كان المماس يوازي المستقيم $ل : ٥س - ص + ٢ = ٠$

١٢) $ص(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + ٣س$ عند $س = ١$ ، $ك \in ح$ (مجالها) ثم أوجد قيمة $ك$ إذا كان المماس يوازي المستقيم $ل : ٥س - ص + ٢ = ٠$

١٣) $ص(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + ٣س$ عند $س = ١$ ، $ك \in ح$ (مجالها) ثم أوجد قيمة $ك$ إذا كان المماس يوازي المستقيم $ل : ٥س - ص + ٢ = ٠$

١٤) $ص(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + ٣س$ عند $س = ١$ ، $ك \in ح$ (مجالها) ثم أوجد قيمة $ك$ إذا كان المماس يوازي المستقيم $ل : ٥س - ص + ٢ = ٠$

١٥) $ص(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + ٣س$ عند $س = ١$ ، $ك \in ح$ (مجالها) ثم أوجد قيمة $ك$ إذا كان المماس يوازي المستقيم $ل : ٥س - ص + ٢ = ٠$

١٦) $ص(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + ٣س$ عند $س = ١$ ، $ك \in ح$ (مجالها) ثم أوجد قيمة $ك$ إذا كان المماس يوازي المستقيم $ل : ٥س - ص + ٢ = ٠$

١٧) $ص(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + ٣س$ عند $س = ١$ ، $ك \in ح$ (مجالها) ثم أوجد قيمة $ك$ إذا كان المماس يوازي المستقيم $ل : ٥س - ص + ٢ = ٠$

١٨) $ص(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + ٣س$ عند $س = ١$ ، $ك \in ح$ (مجالها) ثم أوجد قيمة $ك$ إذا كان المماس يوازي المستقيم $ل : ٥س - ص + ٢ = ٠$

١٩) $ص(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + ٣س$ عند $س = ١$ ، $ك \in ح$ (مجالها) ثم أوجد قيمة $ك$ إذا كان المماس يوازي المستقيم $ل : ٥س - ص + ٢ = ٠$

٢٠) $ص(س) = س^{٣} + ك س^{٢} + ٣س$ عند $س = ١$ ، $ك \in ح$ (مجالها) ثم أوجد قيمة $ك$ إذا كان المماس يوازي المستقيم $ل : ٥س - ص + ٢ = ٠$

$x = \frac{1+a}{2}$	$a+1$	a
(a, x)		
$(-0.5, 3)$	0.5	-5.0
$(-0.25, 1.0)$	2.0	-0.8
$(-0.167, 0.2)$	1.0	-0.6
$(0.667, 2.0)$	1.0	0.99
$(-1.1, -20)$	-0.1	-1.10
$(-1.05, -3)$	0.0	-1.1
$(-1.025, -4)$	-0.5	-1.5

جدول جذاذ نتائج طريقة نيوتن

نحصل على حل المعادلة غير الخطية $a = -1$ حيث المعادلة $(a+1)$ تساوي الصفر

نستخدم طريقة $a = -1.1$ المعادلة $\frac{a+1}{2}$ عند وجود المشتقة 0 فيكون

مثال ٢.١١

أوجد الحل التقريبي للمعادلة $a^3 - 2a - 5 = 0$ في الفترة $[2, 3]$ بطريقة نيوتن

الحل

نفرض $f(a) = a^3 - 2a - 5$ فتكون $f'(a) = 3a^2 - 2$ ونلاحظ أن $f(2) = -1$ و $f(3) = 16$ أي أن $f(2) \cdot f(3) < 0$ وبالتالي توجد جذر واحد على الأقل في الفترة $[2, 3]$

نختار $a_0 = 2$ لأن $f(2) \cdot f''(2) > 0$ ونستخدم الصيغة التكرارية

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = a_n - \frac{a_n^3 - 2a_n - 5}{3a_n^2 - 2}$$

فنحصل على

$$a_1 = 2 - \frac{-1}{10} = 2.1$$

$$a_2 = 2.1 - \frac{0.061}{11.23} = 2.0945$$

$$a_3 = 2.0945 - \frac{0.0002}{11.1} = 2.0945$$

وبالتالي الجذر التقريبي هو 2.0945

مثال ٢.١٢

أوجد الجذر التقريبي للمعادلة $a^3 - 2a - 5 = 0$ في الفترة $[2, 3]$ بطريقة نيوتن

الحل

نفرض $f(a) = a^3 - 2a - 5$ فتكون $f'(a) = 3a^2 - 2$ ونلاحظ أن $f(2) = -1$ و $f(3) = 16$ أي أن $f(2) \cdot f(3) < 0$ وبالتالي توجد جذر واحد على الأقل في الفترة $[2, 3]$

نختار $a_0 = 2$ لأن $f(2) \cdot f''(2) > 0$ ونستخدم الصيغة التكرارية

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = a_n - \frac{a_n^3 - 2a_n - 5}{3a_n^2 - 2}$$

فنحصل على

$$a_1 = 2 - \frac{-1}{10} = 2.1$$

$$a_2 = 2.1 - \frac{0.061}{11.23} = 2.0945$$

$$a_3 = 2.0945 - \frac{0.0002}{11.1} = 2.0945$$

وبالتالي الجذر التقريبي هو 2.0945

٢.١١ جذور المعادلة

لإيجاد جذور المعادلة $f(a) = 0$ حيث $f(a)$ دالة متصلة ، $g(a) \neq 0$ لكل $a \in$ المجال I

$$\varphi(a) = a - \frac{f(a)}{g(a)}$$

فإن طريقة التكرار هي : $\varphi(a) = \frac{a}{1} \cdot \varphi(a) = \frac{a-1}{a+1}$.

فإن $\varphi(a) = \frac{a^2+1}{a^2-1}$ تقارب ذاتي لكل a ما عدا $a = \pm 1$ وبالتالي

$$\varphi'(a) = \frac{-4a}{(a^2-1)^2}$$

$$\varphi''(a) = \frac{12a^2+4}{(a^2-1)^3}$$

$$\varphi'''(a) = \frac{-96a^3-48a}{(a^2-1)^4}$$

$$\varphi^{(4)}(a) = \frac{384a^4+288a^2+16}{(a^2-1)^5}$$

$$\varphi^{(5)}(a) = \frac{-1920a^5-1920a^3-240a}{(a^2-1)^6}$$

$$\varphi^{(6)}(a) = \frac{11520a^6+14400a^4+2880a^2+96}{(a^2-1)^7}$$

$$\varphi^{(7)}(a) = \frac{-80640a^7-120960a^5-40320a^3-1344a}{(a^2-1)^8}$$

$$\varphi^{(8)}(a) = \frac{645120a^8+1128960a^6+564480a^4+75264a^2+1792}{(a^2-1)^9}$$

$$\varphi^{(9)}(a) = \frac{-5160960a^9-10321920a^7-6773760a^5-1505280a^3-64512a}{(a^2-1)^{10}}$$

$$\varphi^{(10)}(a) = \frac{46448640a^{10}+104509440a^8+75246720a^6+20910080a^4+1935360a^2+23040}{(a^2-1)^{11}}$$

$$\varphi^{(11)}(a) = \frac{-464486400a^{11}-1115673600a^9-929728000a^7-309909333a^5-30965760a^3-737280a}{(a^2-1)^{12}}$$

$$\varphi^{(12)}(a) = \frac{4644864000a^{12}+12059750400a^{10}+11618400000a^8+5163822080a^6+1032764160a^4+73728000a^2+737280}{(a^2-1)^{13}}$$

$$\varphi^{(13)}(a) = \frac{-46448640000a^{13}-139345920000a^{11}-139345920000a^9-74211840000a^7-20643288320a^5-2949120000a^3-88473600a}{(a^2-1)^{14}}$$

$$\varphi^{(14)}(a) = \frac{464486400000a^{14}+1626702400000a^{12}+1951442880000a^{10}+1301628160000a^8+495644160000a^6+103219200000a^4+7741440000a^2+88473600}{(a^2-1)^{15}}$$

$$\varphi^{(15)}(a) = \frac{-4644864000000a^{15}-18579456000000a^{13}-24772608000000a^{11}-18579456000000a^9-8263680000000a^7-2064384000000a^5-247726080000a^3-8493465600a}{(a^2-1)^{16}}$$

$$\varphi^{(16)}(a) = \frac{46448640000000a^{16}+209018880000000a^{14}+334430208000000a^{12}+278691840000000a^{10}+139345920000000a^8+41803776000000a^6+7431782400000a^4+637009920000a^2+8493465600}{(a^2-1)^{17}}$$

$$\varphi^{(17)}(a) = \frac{-464486400000000a^{17}-2322432000000000a^{15}-4644864000000000a^{13}-4644864000000000a^{11}-2786918400000000a^9-1045094400000000a^7-247726080000000a^5-35389440000000a^3-1415577600000a}{(a^2-1)^{18}}$$

$$\varphi^{(18)}(a) = \frac{4644864000000000a^{18}+25546752000000000a^{16}+61072896000000000a^{14}+76341120000000000a^{12}+57256320000000000a^{10}+25669632000000000a^8+6842568192000000a^6+1061683200000000a^4+70778880000000a^2+1415577600000}{(a^2-1)^{19}}$$

$$\varphi^{(19)}(a) = \frac{-46448640000000000a^{19}-279281664000000000a^{17}-743243520000000000a^{15}-1114865280000000000a^{13}-1000378368000000000a^{11}-565247232000000000a^9-203489003520000000a^7-46811570688000000a^5-6369052800000000a^3-339415296000000a}{(a^2-1)^{20}}$$

$$\varphi^{(20)}(a) = \frac{464486400000000000a^{20}+3019899904000000000a^{18}+8880984064000000000a^{16}+14207974502400000000a^{14}+14207974502400000000a^{12}+9473316352000000000a^{10}+4263592243200000000a^8+1279077672960000000a^6+255815534592000000a^4+28423949004800000a^2+678830592000000}{(a^2-1)^{21}}$$

$$\varphi^{(21)}(a) = \frac{-4644864000000000000a^{21}-33093635328000000000a^{19}-106723811328000000000a^{17}-189650698240000000000a^{15}-199633366272000000000a^{13}-132422541312000000000a^{11}-57042232320000000000a^9-15981530419200000000a^7-2982199910400000000a^5-331355545600000000a^3-13565952000000000a}{(a^2-1)^{22}}$$

$$\varphi^{(22)}(a) = \frac{46448640000000000000a^{22}+358158766080000000000a^{20}+1251139276800000000000a^{18}+2515299225600000000000a^{16}+3144124032000000000000a^{14}+2620103360000000000000a^{12}+1468857856000000000000a^{10}+565329408000000000000a^8+146985785856000000000a^6+24497630976000000000a^4+2260531200000000000a^2+45231104000000000000}{(a^2-1)^{23}}$$

$$\varphi^{(23)}(a) = \frac{-464486400000000000000a^{23}-3858158766080000000000a^{21}-14509898035200000000000a^{19}-31144438886400000000000a^{17}-41525918515200000000000a^{15}-37373326663680000000000a^{13}-23284207104000000000000a^{11}-10180729344000000000000a^9-3119999488000000000000a^7-619999488000000000000a^5-70778880000000000000a^3-3391488000000000000a}{(a^2-1)^{24}}$$

$$\varphi^{(24)}(a) = \frac{4644864000000000000000a^{24}+41858158766080000000000a^{22}+175139898035200000000000a^{20}+419144438886400000000000a^{18}+641525918515200000000000a^{16}+677373326663680000000000a^{14}+523284207104000000000000a^{12}+290180729344000000000000a^{10}+123119999488000000000000a^8+34619999488000000000000a^6+6070778880000000000000a^4+565391488000000000000a^2+11307776000000000000}{(a^2-1)^{25}}$$

$$\varphi^{(25)}(a) = \frac{-46448640000000000000000a^{25}-453858158766080000000000a^{23}-2139139898035200000000000a^{21}-5744144438886400000000000a^{19}-9641525918515200000000000a^{17}-10973373326663680000000000a^{15}-8923284207104000000000000a^{13}-5180729344000000000000a^{11}-2119999488000000000000a^9-619999488000000000000a^7-120778880000000000000a^5-13391488000000000000a^3-565776000000000000a}{(a^2-1)^{26}}$$

$$\varphi^{(26)}(a) = \frac{464486400000000000000000a^{26}+4858158766080000000000a^{24}+23139139898035200000000000a^{22}+64144438886400000000000a^{20}+109641525918515200000000000a^{18}+133373326663680000000000a^{16}+113284207104000000000000a^{14}+70180729344000000000000a^{12}+32119999488000000000000a^{10}+10619999488000000000000a^8+2120778880000000000000a^6+265391488000000000000a^4+16307776000000000000a^2+282888000000000000}{(a^2-1)^{27}}$$

$$\varphi^{(27)}(a) = \frac{-4644864000000000000000000a^{27}-53858158766080000000000a^{25}-273139139898035200000000000a^{23}-784144438886400000000000a^{21}-1441525918515200000000000a^{19}-1773373326663680000000000a^{17}-1523284207104000000000000a^{15}-970180729344000000000000a^{13}-452119999488000000000000a^{11}-151619999488000000000000a^9-34120778880000000000000a^7-4391488000000000000a^5-307776000000000000a^3-8888000000000000a}{(a^2-1)^{28}}$$

$$\varphi^{(28)}(a) = \frac{46448640000000000000000000a^{28}+593858158766080000000000a^{26}+3139139898035200000000000a^{24}+9144438886400000000000a^{22}+17641525918515200000000000a^{20}+22373373326663680000000000a^{18}+19284207104000000000000a^{16}+12180729344000000000000a^{14}+5719999488000000000000a^{12}+1919999488000000000000a^{10}+432120778880000000000000a^8+55391488000000000000a^6+3907776000000000000a^4+112888000000000000a^2+2257776000000000000}{(a^2-1)^{29}}$$

$$\varphi^{(29)}(a) = \frac{-464486400000000000000000000a^{29}-6458158766080000000000a^{27}-36139139898035200000000000a^{25}-109144438886400000000000a^{23}-211641525918515200000000000a^{21}-273373326663680000000000a^{19}-239284207104000000000000a^{17}-152180729344000000000000a^{15}-71719999488000000000000a^{13}-24119999488000000000000a^{11}-5432120778880000000000000a^9-695391488000000000000a^7-49907776000000000000a^5-1412888000000000000a^3-28257776000000000000a}{(a^2-1)^{30}}$$

$$\varphi^{(30)}(a) = \frac{4644864000000000000000000000a^{30}+70858158766080000000000a^{28}+436139139898035200000000000a^{26}+1329144438886400000000000a^{24}+2611641525918515200000000000a^{22}+3413373326663680000000000a^{20}+3004207104000000000000a^{18}+1918729344000000000000a^{16}+899999488000000000000a^{14}+303119999488000000000000a^{12}+68432120778880000000000000a^{10}+8795391488000000000000a^8+631907776000000000000a^6+18312888000000000000a^4+357776000000000000a^2+7157776000000000000}{(a^2-1)^{31}}$$

$$\varphi^{(31)}(a) = \frac{-46448640000000000000000000000a^{31}-858158766080000000000a^{29}-5339139898035200000000000a^{27}-16544438886400000000000a^{25}-32941641525918515200000000000a^{23}-43373326663680000000000a^{21}-38284207104000000000000a^{19}-24180729344000000000000a^{17}-11419999488000000000000a^{15}-3819999488000000000000a^{13}-865432120778880000000000000a^{11}-111391488000000000000a^9-7907776000000000000a^7-224888000000000000a^5-4557776000000000000a^3-91157776000000000000a}{(a^2-1)^{32}}$$

$$\varphi^{(32)}(a) = \frac{4644864000000000000000000000000a^{32}+10458158766080000000000a^{30}+65139139898035200000000000a^{28}+198144438886400000000000a^{26}+389641525918515200000000000a^{24}+509373326663680000000000a^{22}+448207104000000000000a^{20}+283729344000000000000a^{18}+133999488000000000000a^{16}+44119999488000000000000a^{14}+10032120778880000000000000a^{12}+1291391488000000000000a^{10}+91907776000000000000a^8+2612888000000000000a^6+52957776000000000000a^4+1057776000000000000a^2+21157776000000000000}{(a^2-1)^{33}}$$

$$\varphi^{(33)}(a) = \frac{-464486400000000000000000000000000a^{33}-1258158766080000000000a^{31}-7939139898035200000000000a^{29}-24144438886400000000000a^{27}-47541641525918515200000000000a^{25}-62373326663680000000000a^{23}-54207104000000000000a^{21}-34329344000000000000a^{19}-16199999488000000000000a^{17}-5319999488000000000000a^{15}-1232120778880000000000000a^{13}-158391488000000000000a^{11}-11307776000000000000a^9-322888000000000000a^7-6557776000000000000a^5-131157776000000000000a^3-2657776000000000000a}{(a^2-1)^{34}}$$

$$\varphi^{(34)}(a) = \frac{4644864000000000000000000000000000a^{34}+15058158766080000000000a^{32}+96139139898035200000000000a^{30}+292144438886400000000000a^{28}+575641525918515200000000000a^{26}+753373326663680000000000a^{24}+648207104000000000000a^{22}+409729344000000000000a^{20}+193999488000000000000a^{18}+64119999488000000000000a^{16}+14832120778880000000000000a^{14}+1907391488000000000000a^{12}+136907776000000000000a^{10}+3892888000000000000a^8+78957776000000000000a^6+1577776000000000000a^4+31557776000000000000a^2+631157776000000000000}{(a^2-1)^{35}}$$

$$\varphi^{(35)}(a) = \frac{-46448640000000000000000000000000000a^{35}-1758158766080000000000a^{33}-11139139898035200000000000a^{31}-34144438886400000000000a^{29}-67241641525918515200000000000a^{27}-88373326663680000000000a^{25}-76207104000000000000a^{23}-48129344000000000000a^{21}-22799999488000000000000a^{19}-7519999488000000000000a^{17}-1732120778880000000000000a^{15}-223391488000000000000a^{13}-15907776000000000000a^{11}-454888000000000000a^9-9257776000000000000a^7-185157776000000000000a^5-3757776000000000000a^3-75157776000000000000a}{(a^2-1)^{36}}$$

$$\varphi^{(36)}(a) = \frac{4644864000000000000000000000000000000a^{36}+20458158766080000000000a^{34}+131139139898035200000000000a^{32}+398144438886400000000000a^{30}+783641525918515200000000000a^{28}+1023373326663680000000000a^{26}+880207104000000000000a^{24}+555729344000000000000a^{22}+263999488000000000000a^{20}+87119999488000000000000a^{18}+20132120778880000000000000a^{16}+2587391488000000000000a^{14}+185907776000000000000a^{12}+5292888000000000000a^{10}+107257776000000000000a^8+2157776000000000000a^6+43157776000000000000a^4+863157776000000000000a^2+17257776000000000000}{(a^2-1)^{37}}$$

$$\varphi^{(37)}(a) = \frac{-464486400000000000000000000000000000000a^{37}-2358158766080000000000a^{35}-15139139898035200000000000a^{33}-46144438886400000000000a^{31}-91241641525918515200000000000a^{29}-120373326663680000000000a^{27}-103207104000000000000a^{25}-65329344000000000000a^{23}-30799999488000000000000a^{21}-10319999488000000000000a^{19}-2532120778880000000000000a^{17}-351391488000000000000a^{15}-25907776000000000000a^{13}-740888000000000000a^{11}-15057776000000000000a^9-301157776000000000000a^7-6157776000000000000a^5-123157776000000000000a^3-2457776000000000000a}{(a^2-1)^{38}}$$

$$\varphi^{(38)}(a) = \frac{4644864000000000000000000000000000000000a^{38}+26058158766080000000000a^{36}+171139139898035200000000000a^{34}+518144438886400000000000a^{32}+1023641525918515200000000000a^{30}+1343373326663680000000000a^{28}+1168207104000000000000a^{26}+743729344000000000000a^{24}+351999488000000000000a^{22}+119119999488000000000000a^{20}+29132120778880000000000000a^{18}+4587391488000000000000a^{16}+385907776000000000000a^{14}+12292888000000000000a^{12}+207257776000000000000a^{10}+4157776000000000000a^8+83157776000000000000a^6+1663157776000000000000a^4+33257776000000000000a^2+665157776000000000000}{(a^2-1)^{39}}$$

$$\varphi^{(39)}(a) = \frac{-46448640000000000000000000000000000000000a^{39}-2958158766080000000000a^{37}-19139139898035200000000000a^{35}-58144438886400000000000a^{33}-115241641525918515200000000000a^{31}-151373326663680000000000a^{29}-131207104000000000000a^{27}-83329344000000000000a^{25}-39799999488000000000000a^{23}-13519999488000000000000a^{21}-3332120778880000000000000a^{19}-601391488000000000000a^{17}-49907776000000000000a^{15}-1540888000000000000a^{13}-31057776000000000000a^{11}-621157776000000000000a^9-12457776000000000000a^7-249157776000000000000a^5-4957776000000000000a^3-99157776000000000000a}{(a^2-1)^{40}}$$

$$\varphi^{(40)}(a) = \frac{4644864000000000000000000000000000000000000a^{40}+32058158766080000000000a^{38}+211139139898035200000000000a^{36}+643144438886400000000000a^{34}+1271641525918515200000000000a^{32}+1673373326663680000000000a^{30}+1458207104000000000000a^{28}+927729344000000000000a^{26}+439999488000000000000a^{24}+149119999488000000000000a^{22}+37132120778880000000000000a^{20}+6587391488000000000000a^{18}+785907776000000000000a^{16}+25292888000000000000a^{14}+427257776000000000000a^{12}+8557776000000000000a^{10}+171157776000000000000a^8+3423157776000000000000a^6+68457776000000000000a^4+1369157776000000000000a^2+27357776000000000000}{(a^2-1)^{41}}$$

$$\varphi^{(41)}(a) = \frac{-464486400000000000000000000000000000000000000a^{41}-3458158766080000000000a^{39}-23139139898035200000000000a^{37}-70144438886400000000000a^{35}-139241641525918515200000000000a^{33}-183373326663680000000000a^{31}-159207104000000000000a^{29}-101329344000000000000a^{27}-47799999488000000000000a^{25}-16319999488000000000000a^{23}-4132120778880000000000000a^{21}-751391488000000000000a^{19}-99907776000000000000a^{17}-3140888000000000000a^{15}-63057776000000000000a^{13}-1261157776000000000000a^{11}-25257776000000000000a^9-505157776000000000000a^7-10057776000000000000a^5-201157776000000000000a^3-4057776000000000000a}{(a^2-1)^{42}}$$

$$\varphi^{(42)}(a) = \frac{4644864000000000000000000000000000000000000000a^{42}+38058158766080000000000a^{40}+259139139898035200000000000a^{38}+771144438886400000000000a^{36}+1523641525918515200000000000a^{34}+2003373326663680000000000a^{32}+1743207104000000000000a^{30}+1111729344000000000000a^{28}+519999488000000000000a^{26}+179119999488000000000000a^{24}+45132120778880000000000000a^{22}+8187391488000000000000a^{20}+985907776000000000000a^{18}+31292888000000000000a^{16}+527257776000000000000a^{14}+10557776000000000000a^{12}+211157776000000000000a^{10}+4223157776000000000000a^8+84457776000000000000a^6+1689157776000000000000a^4+33757776000000000000a^2+675157776000000000000}{(a^2-1)^{43}}$$

$$\varphi^{(43)}(a) = \frac{-46448640000000000000000000000000000000000000000a^{43}-4158158766080000000000a^{41}-27939139898035200000000000a^{39}-83144438886400000000000a^{37}-167241641525918515200000000000a^{35}-220373326663680000000000a^{33}-191207104000000000000a^{31}-121329344000000000000a^{29}-55799999488000000000000a^{27}-19119999488000000000000a^{25}-4932120778880000000000000a^{23}-901391488000000000000a^{21}-119907776000000000000a^{19}-3740888000000000000a^{17}-75057776000000000000a^{15}-1501157776000000000000a^{13}-30057776000000000000a^{11}-601157776000000000000a^9-12057776000000000000a^7-241157776000000000000a^5-4857776000000000000a^3-97157776000000000000a}{(a^2-1)^{44}}$$

$$\varphi^{(44)}(a) = \frac{4644864000000000000000000000000000000000000000000a^{44}+44058158766080000000000a^{42}+299139139898035200000000000a^{40}+895144438886400000000000a^{38}+1771641525918515200000000000a^{36}+2333373326663680000000000a^{34}+2023207104000000000000a^{32}+1295729344000000000000a^{30}+599999488000000000000a^{28}+209119999488000000000000a^{26}+53132120778880000000000000a^{24}+9787391488000000000000a^{22}+1185907776000000000000a^{20}+37292888000000000000a^{18}+627257776000000000000a^{16}+12557776000000000000a^{14}+251157776000000000000a^{12}+5023157776000000000000a^{10}+100457776000000000000a^8+2009157776000000000000a^6+40157776000000000000a^4+803157776000000000000a^2+16057776000000000000}{(a^2-1)^{45}}$$

$$\varphi^{(45)}(a) = \frac{-464486400000000000000000000000000000000000000000000a^{45}-4858158766080000000000a^{43}-32939139898035200000000000a^{41}-98144438886400000000000a^{39}-195241641525918515200000000000a^{37}-256373326663680000000000a^{35}-223207104000000000000a^{33}-142329344000000000000a^{31}-65799999488000000000000a^{29}-22119999488000000000000a^{27}-5732120778880000000000000a^{25}-1041391488000000000000a^{23}-139907776000000000000a^{21}-4340888000000000000a^{19}-87057776000000000000a^{17}-1741157776000000000000a^{15}-34857776000000000000a^{13}-697157776000000000000a^{11}-13957776000000000000a^9-279157776000000000000a^7-5657776000000000000a^5-113157776000000000000a^3-2257776000000000000a}{(a^2-1)^{46}}$$

$$\varphi^{(46)}(a) = \frac{4644864000000000000000000000000000000000000000000000a^{46}+50058158766080000000000a^{44}+339139139898035200000000000a^{42}+1015144438886400000000000a^{40}+2019641525918515200000000000a^{38}+2663373326663680000000000a^{36}+2303207104000000000000a^{34}+1479729344000000000000a^{32}+683999488000000000000a^{30}+239119999488000000000000a^{28}+61132120778880000000000000a^{26}+11187391488000000000000a^{24}+1345907776000000000000a^{22}+42292888000000000000a^{20}+987257776000000000000a^{18}+19757776000000000000a^{16}+395157776000000000000a^{14}+7907157776000000000000a^{12}+158157776000000000000a^{10}+3163157776000000000000a^8+63257776000000000000a^6+1265157776000000000000a^4+25357776000000000000a^2+507157776000000000000}{(a^2-1)^{47}}$$

$$\varphi^{(47)}(a) = \frac{-46448640000000000000000000000000000000000000000000000a^{47}-5458158766080000000000a^{45}-37139139898035200000000000a^{43}-114144438886400000000000a^{41}-227241641525918515200000000000a^{39}-299373326663680000000000a^{37}-259207104000000000000a^{35}-166329344000000000000a^{33}-76799999488000000000000a^{31}-25119999488000000000000a^{29}-6532120778880000000000000a^{27}-1187391488000000000000a^{25}-153907776000000000000a^{23}-4740888000000000000a^{21}-99057776000000000000a^{19}-1981157776000000000000a^{17}-39657776000000000000a^{15}-793157776000000000000a^{13}-15857157776000000000000a^{11}-317157776000000000000a^9-6357157776000000000000a^7-127157776000000000000a^5-2557157776000000000000a^3-51157776000000000000a}{(a^2-1)^{48}}$$

$$\varphi^{(48)}(a) = \frac{4644864000000000000000000000000000000000000000000000000a^{48}+62058158766080000000000a^{46}+419139139898035200000000000a^{44}+1255144438886400000000000a^{42}+2499641525918515200000000000a^{40}+3293373326663680000000000a^{38}+2863207104000000000000a^{36}+1839729344000000000000a^{34}+847999488000000000000a^{32}+295119999488000000000000a^{30}+75132120778880000000000000a^{28}+13787391488000000000000a^{26}+1545907776000000000000a^{24}+48292888000000000000a^{22}+1127257776000000000000a^{20}+22557776000000000000a^{18}+451157776000000000000a^{16}+9027157776000000000000a^{14}+180557157776000000000000a^{12}+3611157776000000000000a^{10}+72257157776000000000000a^8+1445157776000000000000a^6+28957157776000000000000a^4+579157776000000000000a^2+11557157776000000000000}{(a^2-1)^{49}}$$

$$\varphi^{(49)}(a) = \frac{-464486400000000000000000000000000000000000000000000000a^{49}-6458158766080000000000a^{47}-43939139898035200000000000a^{45}-134144438886400000000000a^{43}-267241641525918515200000000000a^{41}-353373326663680000000000a^{39}-307207104000000000000a^{37}-199329344000000000000a^{35}-93799999488000000000000a^{33}-31119999488000000000000a^{31}-8132120778880000000000000a^{29}-1487391488000000000000a^{27}-193907776000000000000a^{25}-5940888000000000000a^{23}-124057776000000000000a^{21}-2481157776000000000000a^{19}-49657776000000000000a^{17}-993157776000000000000a^{15}-19857157776000000000000a^{13}-397157157776000000000000a^{11}-7943157776000000000000a^9-158857157776000000000000a^7-3177157776000000000000a^5-63557157776000000000000a^3-1271157776000000000000a}{(a^2-1)^{50}}$$

$$\varphi^{(50)}(a) = \frac{4644864000000000000000000000000000000000000000000000000000a^{50}+74058158766080000000000a^{48}+503139139898035200000000000a^{46}+1495144438886400000000000a^{44}+2979641525918515200000000000a^{42}+3923373326663680000000000a^{40}+3423207104000000000000a^{38}+2199729344000000000000a^{36}+1015999488000000000000a^{34}+343119999488000000000000a^{32}+87132120778880000000000000a^{30}+16187391488000000000000a^{28}+2145907776000000000000a^{26}+198292888000000000000a^{24}+4627257776000000000000a^{22}+92557776000000000000a^{20}+1851157776000000000000a^{18}+37057776000000000000a^{16}+741157776000000000000a^{14}+14827157776000000000000a^{12}+296557157776000000000000a^{10}+5931157776000000000000a^8+118657157776000000000000a^6+2373157776000000000000a^4+47457157776000000000000a^2+949157776000000000000}{(a^2-1)^{51}}$$

$$\varphi^{(51)}(a) = \frac{-46448640000000000000000000000000000000000000000000000000000a^{51}-7058158766080000000000a^{49}-48139139898035200000000000a^{47}-154144438886400000000000a^{45}-307241641525918515200000000000a^{43}-403373326663680000000000a^{41}-351207104000000000000a^{39}-225329344000000000000a^{37}-103999488000000000000a^{35}-35119999488000000000000a^{33}-8932120778880000000000000a^{31}-1787391488000000000000a^{29}-241907776000000000000a^{27}-22292888000000000000a^{25}-1527257776000000000000a^{23}-72557776000000000000a^{21}-2451157776000000000000a^{19}-49057776000000000000a^{17}-981157776000000000000a^{15}-19627157776000000000000a^{13}-392557157776000000000000a^{11}-7851157776000000000000a^9-157057157776000000000000a^7-3141157776000000000000a^5-62857157776000000000000a^3-1257157776000000000000a}{(a^2-1)^{52}}$$

$$\varphi^{(52)}(a) = \frac{4644864000000000000000000000000000000000000000000000000000000a^{52}+86058158766080000000000a^{50}+599139139898035200000000000a^{48}+1815144438886400000000000a^{46}+3619641525918515200000000000a^{44}+4763373326663680000000000a^{42}+4143207104000000000000a^{40}+2659729344000000000000a^{38}+1223999488000000000000a^{36}+415119999488000000000000a^{34}+103132120778880000000000000a^{32}+20187391488000000000000a^{30}+2745907776000000000000a^{28}+252292888000000000000a^{26}+16827257776000000000000a^{24}+772557776000000000000a^{22}+26051157776000000000000a^{20}+521057776000000000000a^{18}+10421157776000000000000a^{16}+208427157776000000000000a^{14}+4168557157776000000000000a^{12}+83371157776000000000000a^{10}+1667457157776000000000000a^8+33349157776000000000000a^6+666957157776000000000000a^4+13339157776000000000000a^2+266757157776000000000000}{(a^2-1)^{53}}$$

$$\varphi^{(53)}(a) = \frac{-464486400000000000000000000000000000000000000000000000000000000a^{53}-8058158766080000000000a^{51}-55139139898035200000000000a^{49}-178144438886400000000000a^{47}-363241641525918515200000000000a^{45}-483373326663680000000000a^{43}-423207104000000000000a^{41}-271329344000000000000a^{39}-123999488000000000000a^{37}-41119999488000000000000a^{35}-10132120778880000000000000a^{33}-1987391488000000000000a^{31}-273907776000000000000a^{29}-25292888000000000000a^{27}-1727257776000000000000a^{25}-77557776000000000000a^{23}-2601157776000000000000a^{21}-52057776000000000000a^{19}-1041157776000000000000a^{17}-20827157776000000000000a^{15}-416557157776000000000000a^{13}-8331157776000000000000a^{11}-166557157776000000000000a^9-3331157776000000000000a^7-66657157776000000000000a^5-1333157776000000000000a^3-26657157776000000000000a}{(a^2-1)^{54}}$$

$$\varphi^{(54)}(a) = \frac{4644864000000000000000000000000000000000000000000000000000000000a^{54}+98058158766080000000000a^{52}+683139139898035200000000000a^{50}+2055144438886400000000000a^{48}+4099641525918515200000000000a^{46}+5393373326663680000000000a^{44}+4703207104000000000000a^{42}+3019729344000000000000a^{40}+1403999488000000000000a^{38}+475119999488000000000000a^{36}+119132120778880000000000000a^{34}+23187391488000000000000a^{32}+3145907776000000000000a^{30}+290292888000000000000a^{28}+19427257776000000000000a^{26}+892557776000000000000a^{24}+30051157776000000000000a^{22}+601057776000000000000a^{20}+12021157776000000000000a^{18}+240427157776000000000000a^{16}+4808557157776000000000000a^{14}+96171157776000000000000a^{12}+1923457157776000000000000a^{10}+38469157776000000000000a^8+769357157776000000000000a^6+15389157776000000000000a^4+307757157776000000000000a^2+6155157776000000000000}{(a^2-1)^{55}}$$

$$\varphi^{(55)}(a) = \frac{-46448640000000000000000000000000000000000000000000000000000000000a^{55}-9058158766080000000000a^{53}-62139139898035200000000000a^{51}-202144438886400000000000a^{49}-411241641525918515200000000000a^{47}-543373326663680000000000a^{45}-473207104000000000000a^{43}-303329344000000000000a^{41}-139999488000000000000a^{39}-47119999488000000000000a^{37}-12132120778880000000000000a^{35}-2387391488000000000000a^{33}-353907776000000000000a^{31}-32292888000000000000a^{29}-2127257776000000000000a^{27}-97557776000000000000a^{25}-3201157776000000000000a^{23}-64057776000000000000a^{21}-1281157776000000000000a^{19}-25627157776000000000000a^{17}-512557157776000000000000a^{15}-10251157776000000000000a^{13}-205057157776000000000000a^{11}-4101157776000000000000a^9-82057157776000000000000a^7-1641157776000000000000a^5-32857157776000000000000a^3-657157776000000000000a}{(a^2-1)^{56}}$$

$$\varphi^{(56)}(a) = \frac{4644864000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000a^{56}+110058158766080000000000a^{54}+771139139898035200000000000a^{52}+2335144438886400000000000a^{50}+4739641525918515200000000000a^{48}+6243373326663680000000000a^{46}+5463207104000000000000a^{44}+3499729344000000000000a^{42}+1643999488000000000000a^{40}+555119999488000000000000a^{38}+139132120778880000000000000a^{36}+27187391488000000000000a^{34}+3745907776000000000000a^{32}+338292888000000000000a^{30}+22827257776000000000000a^{28}+1052557776000000000000a^{26}+35451157776000000000000a^{24}+709057776000000000000a^{22}+14181157776000000000000a^{20}+283627157776000000000000a^{18}+5672557157776000000000000a^{16}+113451157776000000000000a^{14}+2269057157776000000000000a^{12}+45381157776000000000000a^{10}+907657157776000000000000a^8+18153157776000000000000a^6+363057157776000000000000a^4+7261157776000000000000a^2+145257157776000000000000}{(a^2-1)^{57}}$$

$$\varphi^{(57)}(a) = \frac{-464486400000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000a^{57}-10058158766080000000000a^{55}-69139139898035200000000000a^{53}-234144438886400000000000a^{51}-539241641525918515200000000000a^{49}-723373326663680000000000a^{47}-623207104000000000000a^{45}-399329344000000000000a^{43}-183999488000000000000a^{41}-63119999488000000000000a^{39}-16132120778880000000000000a^{37}-3187391488000000000000a^{35}-473907776000000000000a^{33}-44292888000000000000a^{31}-2927257776000000000000a^{29}-137557776000000000000a^{27}-4701157776000000000000a^{25}-96057776000000000000a^{23}-1941157776000000000000a^{21}-39627157776000000000000a^{19}-793557157776000000000000a^{17}-15891157776000000000000a^{15}-318057157776000000000000a^{13}-6363157776000000000000a^{11}-127257157776000000000000a^9-2547157776000000000000a^7-50957157776000000000000a^5-1019157776000000000000a^3-20457157776000000000000a}{(a^2-1)^{58}}$$

$$\varphi^{(58)}(a) = \frac{4644864000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000a^{58}+122058158766080000000000a^{56}+859139139898035200000000000a^{54}+2615144438886400000000000a^{52}+5379641525918515200000000000a^{50}+7093373326663680000000000a^{48}+6223207104000000000000a^{46}+4019729344000000000000a^{44}+1883999488000000000000a^{42}+635119999488000000000000a^{40}+155132120778880000000000000a^{38}+30187391488000000000000a^{36}+4345907776000000000000a^{34}+386292888000000000000a^{32}+25427257776000000000000a^{30}+1192557776000000000000a^{28}+39951157776000000000000a^{26}+801057776000000000000a^{24}+16021157776000000000000a^{22}+320427157776000000000000a^{20}+6408557157776000000000000a^{18}+128171157776000000000000a^{16}+2563457157776000000000000a^{14}+51269157776000000000000a^{12}+1025357157776000000000000a^{10}+20509157776000000000000a^8+410157157776000000000000a^6+8205157776000000000000a^4+164157157776000000000000a^2+3285157776000000000000}{(a^2-1)^{59}}$$

$$\varphi^{(59)}(a) = \frac{-46448640000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000a^{59}-11058158766080000000000a^{57}-76139139898035200000000000a^{55}-266144438886400000000000a^{53}-619241641525918515200000000000a^{51}-843373326663680000000000a^{49}-743207104000000000000a^{47}-479329344000000000000a^{45}-223999488000000000000a^{43}-75119999488000000000000a^{41}-19132120778880000000000000a^{39}-3787391488000000000000a^{37}-553907776000000000000a^{35}-52292888000000000000a^{33}-3527257776000000000000a^{31}-167557776000000000000a^{29}-5801157776000000000000a^{27}-120057776000000000000a^{25}-2421157776000000000000a^{23}-49627157776000000000000a^{21}-993557157776000000000000a^{19}-19891157776000000000000a^{17}-398057157776000000000000a^{15}-7963157776000000000000a^{13}-159257157776000000000000a^{11}-3185157776000000000000a^9-63757157776000000000000a^7-1275157776000000000000a^5-25557157776000000000000a^3-511157776000000000000a}{(a^2-1)^{60}}$$

$$\varphi^{(60)}(a) = \frac{4644864000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000a^{60}+134058158766080000000000a^{58}+947139139898035200000000000a^{56}+2935144438886400000000000a^{54}+6059641525918515200000000000a^{52}+8023373326663680000000000a^{50}+7103207104000000000000a^{48}+4619729344000000000000a^{46}+2203999488000000000000a^{44}+875119999488000000000000a^{42}+235132120778880000000000000a^{40}+47187391488000000000000a^{38}+6745907776000000000000a^{36}+658292888000000000000a^{34}+46427257776000000000000a^{32}+2352557776000000000000a^{30}+83151157776000000000000a^{28}+2001

مثال أوجد معادلة المماس المرسوم من النقطة $(-٢ ، ٠)$ إلى منحنى الدالة $ص = \frac{٢ س + ٤}{س + ١}$ .....(١)

الحل معادلة المماس المرسوم من النقطة $(-٢ ، ٠)$ هي $ص = ق (س + ٢)$ حيث ق هي ميل المماس

$$\frac{٢ س + ٤}{س + ١} = ق (س + ٢) \Rightarrow ٢ س + ٤ = ق س^{٢} + ٢ ق + س ق$$

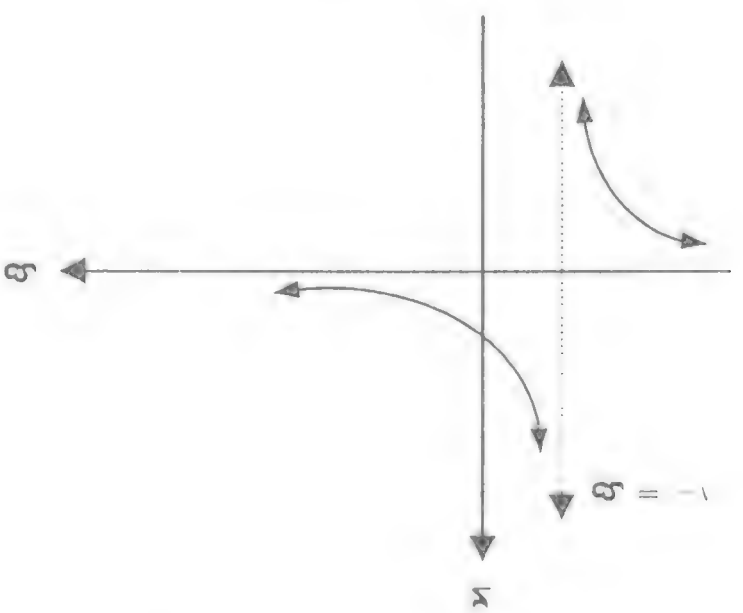
$$\Rightarrow ق س^{٢} + س ق - ٢ ق - ٢ = ٠$$

$$\Rightarrow ق (س^{٢} + س - ٢) = ٢ - س$$

$$\Rightarrow ق = \frac{٢ - س}{س^{٢} + س - ٢} \quad \text{.....(٢)}$$

بما أن المماس يمس المنحنى عند $س = \frac{-٤}{٢}$ فإن ميل المماس عند $س = -٢$

$$= \frac{٣}{٣} = ١$$



نقطة تقاطع المماس مع المحور السيني هي $(-٢ ، ٠)$.

ثم نعوض عن $|ق|$ أيجاد نسبة نسبة إلى $\frac{ق + ١}{٢}$ فيكون نسبة نسبة متداوية ثم

ملحوظة يمكن حساب ميل المماس لمنحنى الدالة بدلالة ميل المماس

نوصل بين نقطة معلومة (ولا يجب $س = ٠$).

مثال (٣٥) دَعْ $ق(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} - ٩س + ٥$ ، جد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق ثم حدد قيم $س$ التي عندها قيم عظمى محلية وقيم صغرى محلية إن وجدت :

الحل

١) نجد نقاط حرجة للاقتران ق

٢) نجد مشتقة الاقتران ق ونساويها بالصفر لإيجاد النقاط الحرجة

٣) نجد قيم $س$ التي عندها $ق'(س)$ غير معرفة

٤) نختبر إشارة $ق'$ على فترات مفتوحة تحوي النقاط الحرجة

٥) نكون جدولاً نبين فيه الفترات وإشارة $ق'$ في كل منها

٦) نجد قيم الاقتران ق عند النقاط الحرجة

$ق'(س) = ٣س^{٢} + ٦س - ٩$

$٣س^{٢} + ٦س - ٩ = ٠$

$٣(س^{٢} + ٢س - ٣) = ٠$

$٣(س + ٣)(س - ١) = ٠$

$س = -٣ ، ١$

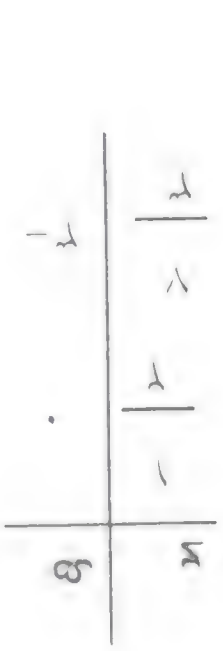
الفترة	إشارة $ق'$	إشارة $ق$	$س$
			$-\infty$
$\{س : س < -٣\}$	+		-٣
$\{-٣ < س < ١\}$		−	١
$\{س : س > ١\}$	+		∞

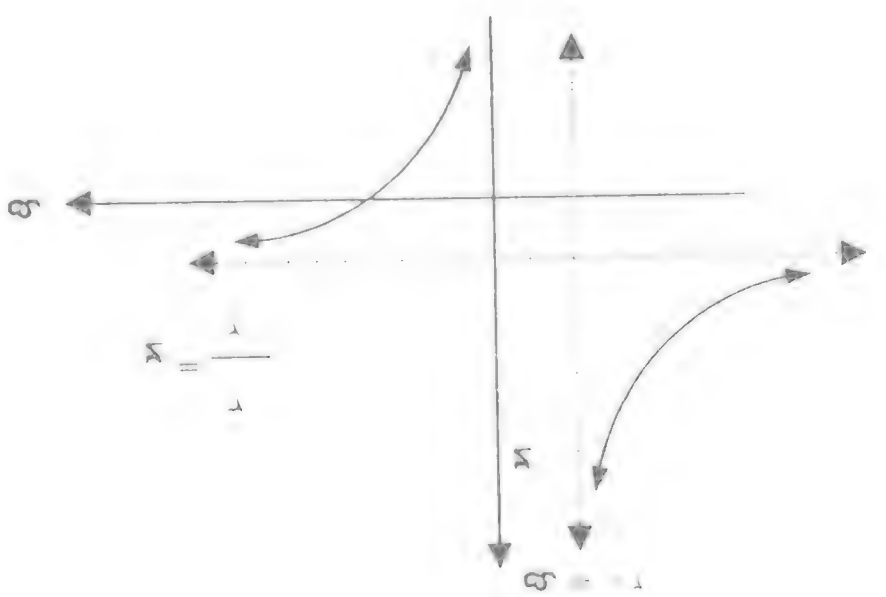
ق متزايدة في $(-\infty, -٣) \cup (١, \infty)$

ق متناقصة في $(-٣, ١)$

ق لها قيمة عظمى محلية عند $س = -٣$ هي $ق(-٣) = ٣٢$

ق لها قيمة صغرى محلية عند $س = ١$ هي $ق(١) = ٠$





أمثلة (٣٠ ـ ٣٠)

سوف يدرس تماثل ق بالنسبة لنقطة الأصل حيث ستكون دوما تحت كل ∋ ∈ ح

لأن ـ∋ ∈ ح أيضا

ق (ـ∋) = (ـ∋)^{٥} = ـ∋^{٥} = ـق(∋)

أذا وجد كل (∋ ، ع) ∈ ق لأن (ـ∋ ، ـع) ∈ ق

الخلاصة (٣٦) دالة القوة ذات الأس الفردي تماثل نقطة الأصل

تمارين :

ق(∋) = (∋ + ٢) (∋ ـ ١)^{٢}

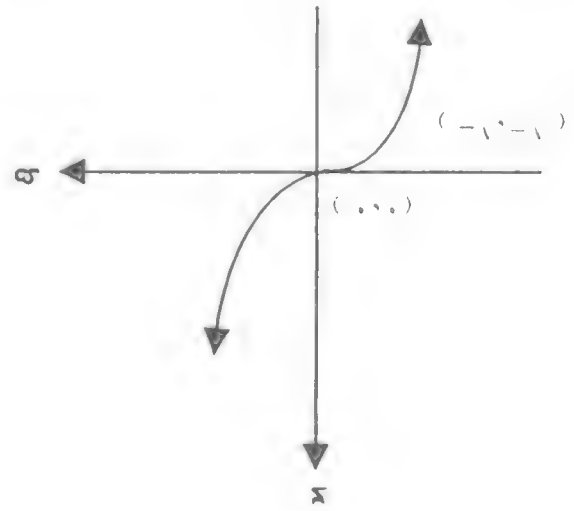
مثال (١) نقطة حرجة لأن ق$'$(∋) = ٠

ق$'$(∋) = (∋ + ٢) × ٢ (∋ ـ ١) × ١ + (∋ ـ ١)^{٢} × ١

= (∋ ـ ١) (٣ ∋ + ٤ + ∋ ـ ١)

= (∋ ـ ١) (٤ ∋ + ٣)

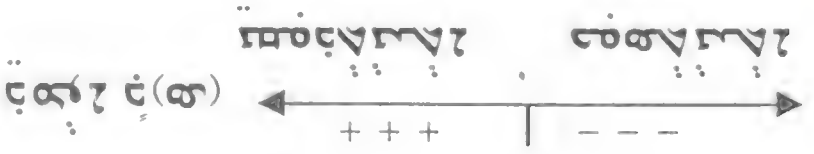
∋	٠	١	ـ١
ق	٠	١	ـ١



(٠ ، ٠) نقطة حرجة

ق متناقصة في { ∋ : ∋ < ٠ }

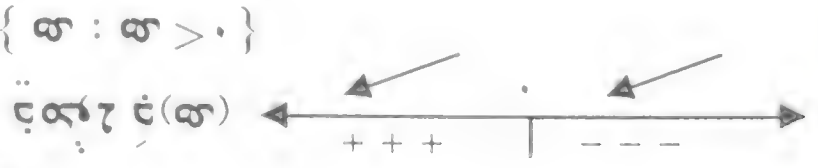
ق متزايدة في { ∋ : ∋ > ٠ }



ق إنعكاس { ∋ : ∋ < ٠ } ، { ∋ : ∋ > ٠ }

ق$'$(∋) = ـ٢٠ ∋^{٣}

نحسب ق$'$(∋) = ٠ ⟹ ∋ = ٠



(٢) ق$'$ (∋) = ٥ ∋^{٤}

(٣) (٠ ، ٠) نقطة حرجة ولكن ليست نقطة انعطاف

مثال (١) نقطة حرجة لأن ق$'$(∋) = ٠

٤) فجد فترات التقعر لأعلى وفترات التقعر لأسفل ونقط الانقلاب لكل من الدوال التالية:

$$\text{د}(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س + ٢$$

$$\text{د}'(س) = ٣س^{٢} - ٦س + ٣$$

$$\text{د}''(س) = ٦س - ٦$$

عند نقط الانقلاب $\text{د}''(س) = ٠ \Leftarrow س = ١$

$\therefore$ (١ ، ٠) نقطة انقلاب

عند $س = ٠ \Rightarrow \text{د}''(س) = -٦ < ٠$ التقعر لأسفل

عند $س = ٢ \Rightarrow \text{د}''(س) = ٦ > ٠$ التقعر لأعلى

$\therefore$ (٠ ، ٢) نقطة انقلاب

في $]-\infty ، ١[$ التقعر لأسفل

في $]١ ، \infty[$ التقعر لأعلى

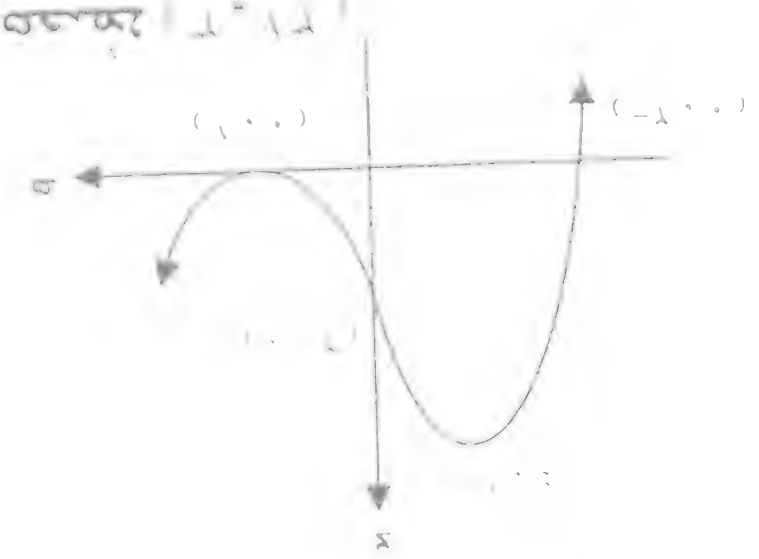
$$\text{د}(س) = س^{٤} - ٤س^{٣} + ٤س^{٢} + ٥$$

$$\text{د}'(س) = ٤س^{٣} - ١٢س^{٢} + ٨س$$

$$\text{د}''(س) = ١٢س^{٢} - ٢٤س + ٨$$

عند نقط الانقلاب $\text{د}''(س) = ٠ \Leftarrow س = ١ ، ٢$

	$س$	أ	$\text{د}(س)$	
$\text{د}''$	٠	٤	٢	٠
$\text{د}'$	١	-١	٠	-٢



$\therefore$ (٠ ، ١) نقطة انقلاب

$\therefore$ (٢- ، ٠) نقطة انقلاب

التقعر لأعلى في $]-\infty ، ٠[$

التقعر لأسفل في $]٠ ، \infty[$

$$\text{د}(س) = (س - ١)^{٣} \times ٣ + (٣س + ٣)^{٢} \times ١$$

$$= ٦$$

$\therefore$ (١ ، ٠) نقطة انقلاب ولكنها ليست نقطة حرجة

(١- ، ٤) نقطة تقعر لأعلى

في $]-\infty ، ١-[$ التقعر لأعلى

في $]١- ، \infty[$ التقعر لأسفل

$\therefore$ (١- ، ١) نقطة انقلاب

$\text{د}'(س)$ إشارة

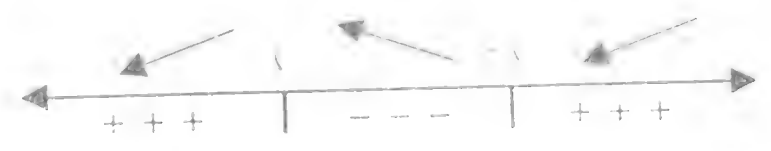


التقعر لأعلى التقعر لأسفل

عند نقط الانقلاب $\text{د}''(س) = ٠ \Leftarrow س = ١ ، ٢$

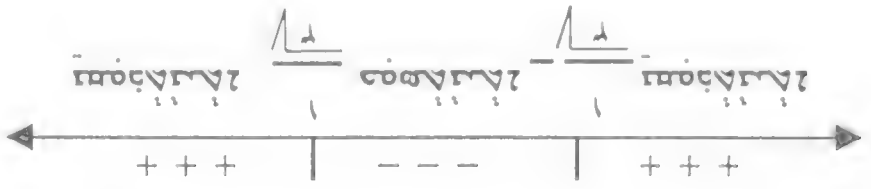
$$= (س - ١)(٣س^{٢} + ٣)$$

$\text{د}'(س)$ إشارة



د متصدا لكه $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}, -\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$

د دصعدا لكه $\{س : س > \frac{١}{\sqrt{٣}}\}$ ، $\{س : س < -\frac{١}{\sqrt{٣}}\}$



إشارة $ق'(س)$

$ق'(س) = ٠ \Rightarrow س = \pm \frac{١}{\sqrt{٣}}$

$= \frac{(س^{٢} + ١)^{٢}}{-٨ س^{٣}} + \frac{(س^{٢} + ١)^{٢}}{٢}$

$ق'(س) = ٣ س \times (-٢)(س^{٢} + ١)^{-٣} \times ٢ س + (س^{٢} + ١)^{-٢} \times ٢$

$ق'(س) = ٣ س (س^{٢} + ١)^{-٢}$

د تحدبا لكه $\{س : س < ٠\}$

د تقعرا لكه $\{س : س > ٠\}$



إشارة $ق'(س)$

$ق'(س) = ٠ \Rightarrow س = ٠$

$ق'(س) = \frac{(س^{٢} + ١)^{٢}}{٢ س}$

$(٣)\ ق''(س) = \frac{(س^{٢} + ١)^{٢}}{(س^{٢} + ١) \times ٢ س - س^{٢} \times ٢ س}$

∴ (٠ ، ٠) دصقا قطاقتلا نم ضيدا قنحنملا

ملاطخ $ص = ٠ \Rightarrow س = ٠$

لطخ $س = ٠ \Rightarrow ص = ٠$

(٢) دصقا قطاقتلا نم ضيدا

مدخا (١) ضصخ قلصلا = ٤

$ق(س) = \frac{س^{٢} + ١}{س^{٢}}$

مثال (٢٣) دضلسدا قضنحنملا لع سئلدا ضرع طبلا

أوجد نقط الحرجة لكل من الدوال الآتية ثم صنفها :

(١) $\dot{ق}(س) = س^{٤} - ٤س^{٢} + ١$

(٢) $\dot{ق}(س) = ٢٠ - ٢٧س - ٨س^{٢}$

(٣) $\dot{ق}(س) = س^{٣} - ٣س$

(٤) $\dot{ق}(س) = س^{٣} + ٣س^{٢}$

(٥) $\dot{ق}(س) = (١ - س)^{٣} + ١٠$

(٦) $\dot{ق}(س) = (س + ١)^{٣}$

(٧) $\dot{ق}(س) = س^{٤} - ٢س^{٢} + ١$

(٨) $\dot{ق}(س) = ٣ - ٨س$

الحل

(١) $\dot{ق}(س) = ٤س^{٣} = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$\dot{ق}(٠) = ٣$

$\dot{ق}(س) = ٤س^{٣}$

س	$(-\infty, ٠)$	٠	$(٠, \infty)$
$\dot{ق}(س)$	−	٠	+
ق	↓	٣	↑

∴ $(٠ ، ٣)$ نقطة صغرى محلية

(٢) $\dot{ق}(س) = -١٦س - ١٦س^{٢} = ٠$

$-١٦س(١ + س) = ٠ \Leftarrow س = ٠ \text{ ، } س = -١$

$\dot{ق}(-١) = ٢٠ - ٨ + ١٦ = ٢٨$

$\dot{ق}(٠) = ٢٠$

$\dot{ق}(س) = -١٦ - ١٦س - ١٦س^{٢}$

$\dot{ق}(-١) = ١٦ > ٠$ ∴ $(-١ ، ٢٨)$ نقطة صغرى محلية

$\dot{ق}(٠) = -١٦ < ٠$ ∴ $(٠ ، ٢٠)$ نقطة عظمى محلية

(٣) $\dot{ق}(س) = ٣س^{٢} - ٣ = ٠$

$٣(س^{٢} - ١) = ٠ \Leftarrow س = ١ \text{ ، } س = -١$

$\dot{ق}(-١) = -٢$

$\dot{ق}(١) = ٢$

$\dot{ق}(س) = ٦س$

$\dot{ق}(-١) = -٦ < ٠$ ∴ $(-١ ، -٢)$ نقطة عظمى محلية

$\dot{ق}(١) = ٦ > ٠$ ∴ $(١ ، ٢)$ نقطة صغرى محلية

(٤) $\dot{ق}(س) = ٤س^{٣} + ٦س^{٢} = ٠$

$٢س^{٢}(٢س + ٣) = ٠ \Leftarrow س = ٠ \text{ ، } س = -\frac{٣}{٢}$

$\dot{ق}(-\frac{٣}{٢}) = \frac{٢٧}{٤} - \frac{٢٧}{٨} = \frac{٢٧}{٨}$

$\dot{ق}(٠) = ٠$

$\dot{ق}(س) = ١٢س^{٢} + ١٢س$

$\dot{ق}(-\frac{٣}{٢}) = ١٢(\frac{٩}{٤}) - ١٢(\frac{٣}{٢}) = ٩ > ٠$ ∴ $(-\frac{٣}{٢} ، \frac{٢٧}{٨})$ نقطة صغرى محلية

$\dot{ق}(٠) = ٠$ ∴ $(٠ ، ٠)$ نقطة حرجة

(٥) $\dot{ق}(س) = ٤(١ - س)^{٣} + ٢٠ = ٠$

$(١ - س)^{٣} = -٥ \Leftarrow س = ٦$

$\dot{ق}(٦) = ٠$

$\dot{ق}(س) = -١٢(١ - س)^{٢}$

$\dot{ق}(٦) = -١٢(-٥)^{٢} = -٣٠٠ < ٠$ ∴ $(٦ ، ٠)$ نقطة عظمى محلية

(٦) $\dot{ق}(س) = ٣(س + ١)^{٢} = ٠$

$س = -١$

$\dot{ق}(-١) = ٠$

$\dot{ق}(س) = ٦(س + ١)$

$\dot{ق}(-١) = ٠$ ∴ $(-١ ، ٠)$ نقطة حرجة

(٧) $\dot{ق}(س) = ٤س^{٣} - ٤س = ٠$

$٤س(س^{٢} - ١) = ٠ \Leftarrow س = ٠ \text{ ، } س = ١ \text{ ، } س = -١$

$\dot{ق}(-١) = ١ - ٢ + ١ = ٠$

$\dot{ق}(١) = ١ - ٢ + ١ = ٠$

$\dot{ق}(٠) = ١$

$\dot{ق}(س) = ١٢س^{٢} - ٤$

$\dot{ق}(-١) = ١٢ - ٤ = ٨ > ٠$ ∴ $(-١ ، ٠)$ نقطة صغرى محلية

$\dot{ق}(١) = ١٢ - ٤ = ٨ > ٠$ ∴ $(١ ، ٠)$ نقطة صغرى محلية

$\dot{ق}(٠) = -٤ < ٠$ ∴ $(٠ ، ١)$ نقطة عظمى محلية

(٨) $\dot{ق}(س) = -٨ \neq ٠$

∴ لا توجد نقط حرجة

أوجد نقط الحرجة لكل من الدوال الآتية ثم صنفها :

(١) $\dot{ق}(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٤$

(٢) $\dot{ق}(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ٥$

(٣) $\dot{ق}(س) = س^{٣} - ٣س + ٥$

(٤) $\dot{ق}(س) = س^{٣} - ٦س^{٢} + ٩س + ٢$

(٥) $\dot{ق}(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س + ٥$

(٦) $\dot{ق}(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س + ٥$

(٧) $\dot{ق}(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س + ٥$

(٨) $\dot{ق}(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٣س + ٥$

الحل

(١) $\dot{ق}(س) = ٣س^{٢} - ٦س = ٠$

$٣س(س - ٢) = ٠ \Leftarrow س = ٠ \text{ ، } س = ٢$

$\dot{ق}(٠) = ٤$

$\dot{ق}(٢) = ٨ - ١٢ + ٤ = ٠$

$\dot{ق}(س) = ٦س - ٦$

$\dot{ق}(٠) = -٦ < ٠$ ∴ $(٠ ، ٤)$ نقطة عظمى محلية

$\dot{ق}(٢) = ١٢ - ٦ = ٦ > ٠$ ∴ $(٢ ، ٠)$ نقطة صغرى محلية

(٢) $\dot{ق}(س) = ٦س^{٢} + ٦س - ١٢ = ٠$

$٦(س^{٢} + س - ٢) = ٠$

$٦(س + ٢)(س - ١) = ٠ \Leftarrow س = -٢ \text{ ، } س = ١$

$\dot{ق}(-٢) = ١٦ + ٥$

$\dot{ق}(١) = -٧$

$\dot{ق}(س) = ١٢س + ٦$

$\dot{ق}(-٢) = -١٨ < ٠$ ∴ $(-٢ ، ٢١)$ نقطة عظمى محلية

$\dot{ق}(١) = ١٨ > ٠$ ∴ $(١ ، -٧)$ نقطة صغرى محلية

(٣) $\dot{ق}(س) = ٣س^{٢} - ٣ = ٠$

$٣(س^{٢} - ١) = ٠ \Leftarrow س = ١ \text{ ، } س = -١$

$\dot{ق}(-١) = ٧$

$\dot{ق}(١) = ٣$

$\dot{ق}(س) = ٦س$

$\dot{ق}(-١) = -٦ < ٠$ ∴ $(-١ ، ٧)$ نقطة عظمى محلية

$\dot{ق}(١) = ٦ > ٠$ ∴ $(١ ، ٣)$ نقطة صغرى محلية

(٤) $\dot{ق}(س) = ٣س^{٢} - ١٢س + ٩ = ٠$

$٣(س^{٢} - ٤س + ٣) = ٠$

$٣(س - ٣)(س - ١) = ٠ \Leftarrow س = ٣ \text{ ، } س = ١$

$\dot{ق}(١) = ٤$

$\dot{ق}(٣) = ٢$

$\dot{ق}(س) = ٦س - ١٢$

$\dot{ق}(١) = -٦ < ٠$ ∴ $(١ ، ٤)$ نقطة عظمى محلية

$\dot{ق}(٣) = ٦ > ٠$ ∴ $(٣ ، ٢)$ نقطة صغرى محلية

(٥) $\dot{ق}(س) = ٣س^{٢} - ٦س + ٣ = ٠$

$٣(س^{٢} - ٢س + ١) = ٠$

$٣(س - ١)^{٢} = ٠ \Leftarrow س = ١$

$\dot{ق}(١) = ٤$

$\dot{ق}(س) = ٦س - ٦$

$\dot{ق}(١) = ٠$ ∴ $(١ ، ٤)$ نقطة حرجة

(٦) $\dot{ق}(س) = ٣س^{٢} - ٦س + ٣ = ٠$

$٣(س^{٢} - ٢س + ١) = ٠$

$٣(س - ١)^{٢} = ٠ \Leftarrow س = ١$

$\dot{ق}(١) = ٤$

$\dot{ق}(س) = ٦س - ٦$

$\dot{ق}(١) = ٠$ ∴ $(١ ، ٤)$ نقطة حرجة

(٧) $\dot{ق}(س) = ٣س^{٢} - ٦س + ٣ = ٠$

$٣(س^{٢} - ٢س + ١) = ٠$

$٣(س - ١)^{٢} = ٠ \Leftarrow س = ١$

$\dot{ق}(١) = ٤$

$\dot{ق}(س) = ٦س - ٦$

$\dot{ق}(١) = ٠$ ∴ $(١ ، ٤)$ نقطة حرجة

(٨) $\dot{ق}(س) = ٣س^{٢} - ٦س + ٣ = ٠$

$٣(س^{٢} - ٢س + ١) = ٠$

$٣(س - ١)^{٢} = ٠ \Leftarrow س = ١$

$\dot{ق}(١) = ٤$

$\dot{ق}(س) = ٦س - ٦$

$\dot{ق}(١) = ٠$ ∴ $(١ ، ٤)$ نقطة حرجة

(٥) أوجد فترات التزايد والتناقص لكل من الدوال الآتية حيث $س \in ح$

$$(٧)\ \dot{c}(q) = ٢\,q_{١} - q_{٢}$$

$$(٨)\ \dot{c}(q) = \frac{q_{١} + ١}{١}$$

$$(٩)\ \dot{c}(q) = \frac{q_{١} + ٣}{٢}$$

$$(١٠)\ \dot{c}(q) = \frac{q_{١} + ٣}{q_{١} - ٤}$$

$$(١١)\ \dot{c}(q) = \frac{q_{١} + ١}{q_{١} - ١}$$

٢٠٢) فقلمدة لل عولمة فت ولمدة جصمدل

فعة هوفلمدة سعلمة له عنة جفت ح ىولمة جسمدة وفنعلمد لمس جلمت هعرضمدة جعومدمدة فصفت لم ولمفضمدة لمح فلمة جفت هذه لمجوف سوصفلد وصفح جلمعلمت ولمجوفة جعلمسمدة وفت وسمدة وصفح جفلوفلمدة ... عنة.

ولعفمدة جلد عولل هسوسلوى سجصة ح جلد ملوفصة ولم فوسمدة دجفعدوى لسعلمة دجلدمد دسمة عنة لفت ح عولل لسعة.

ملوفصة (٣٨) لعفسم مفد هعلمة شموة دوعمم (٢٠) لم. سموة

(١) فلمة جلدوفصم فت هة جاوة

(٢) دوعة جهفعلمم ولمفة هة جاوة

الحل نفرض أن طول ضلع القاعدة المربعة = س سم

(١) ∵ الحجم المطلوب = ٤ س^{٢} ..... (١)

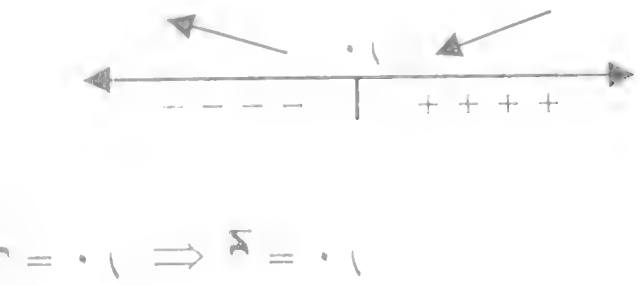
∵ مجموع أطوال الأحرف = ٢٤٠ سم

∴ ٨ س + ٤ ص = ٢٤٠

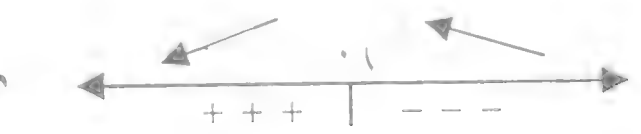
∴ ص = ٦٠ − ٢ س ..... (٢) بالتعويض في (١) نجد أن: ح = ٤ س^{٢} (٦٠ − ٢ س)

ح = ٢٤٠ س^{٢} − ٨ س^{٣}

ح$'$ = ٤٨٠ س − ٢٤ س^{٢} ⇒ ح$'$ = ٠ ⇒ س = ٠ ، ٢٠



نقطة أ



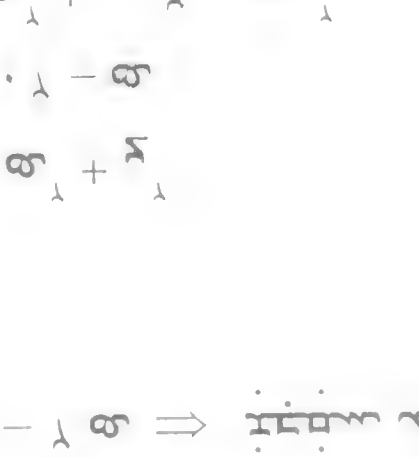
نقطة ب

∴ الحجم الأكبر = ٤ × ١٠ × ١٠ = ٤٠٠ سم^{٣}

إذن حجم أكبر علبة يمكن أن تصنع = ٤٠٠ سم^{٣}

ص = ٦٠ − ٢ س

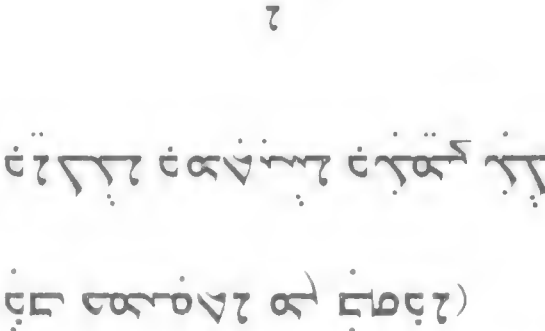
ص = ٦٠ − ٢ × ١٠ = ٤٠ سم



شكل (٢٣ - ٢٠)

(وإذا لم يتحقق الدارس ذلك فعليه بحل المسألة)

الحل نفترض وجود مثلث داخل الدائرة وكما بالرسم بحيث أحد أضلاعه القطر $= ٢$ سم



المثلث (٣٠ ، ٣٠ ، ١٢٠)

وارتفاع هذا المثلث يمثل أحد أبعاد المستطيل

الحل نفرض أن أحد أضلاع المستطيل = ف سم

∴ مساحة المستطيل = ف × ٢ ف = ٢ ف^{٢} سم^{٢}

ولكن مساحة المستطيل تساوي مساحة المثلث

∴ مساحة المثلث = ٢ ف^{٢} سم^{٢}

∴ ق (∠ أ) = ٦٠°

ق (∠ ب) = ٣٠°

ق (∠ ج) = ٩٠°

ولكن مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ب ج × ف

$\frac{١}{٢}$ × ٢ ف × ف = ٢ ف^{٢}

∴ مساحة المثلث = ٢ ف^{٢} سم^{٢}

∴ ٢ ف^{٢} = ٢ ف^{٢}

∴ ف = ١ سم

∴ ب ج = ٢ سم

∴ ب ج = ٢ سم

∴ أ ب = ٢ سم

∴ أ ج = ٢ سم

∴ محيط المثلث = ٦ سم

الحل نفرض أن طول ضلع المثلث = ل سم

∴ ق (∠ أ) = ق (∠ ب) = ق (∠ ج) = ٦٠°

∴ ق (∠ أ) + ق (∠ ب) + ق (∠ ج) = ١٨٠°

∴ ٣ ق (∠ أ) = ١٨٠°

∴ ق (∠ أ) = ٦٠°

∴ المثلث متساوي الأضلاع

∴ ق (∠ ب) = ٦٠°

∴ ق (∠ ج) = ٦٠°

∴ ق (∠ أ) = ق (∠ ب) = ق (∠ ج) = ٦٠°

∴ المثلث متساوي الأضلاع

∴ ق (∠ أ) = ٦٠°

∴ ق (∠ ب) = ٦٠°

∴

حل آخر

$$\text{ميل } \overline{أب} = \frac{٣ - ٠}{٠ - ٣} = \frac{٣}{-٣} = -١$$

$$\text{ميل العمودي} = \frac{-١}{-١} = ١$$

$$\text{معادلة العمودي } \overline{ج د} \text{ هي } ص - ٠ = ١ (س - ٣)$$

$$\therefore ص = س - ٣ \quad \ldots\ldots\ldots (١)$$

$$\text{معادلة } \overline{أب} \text{ هي } ص - ٣ = -١ (س - ٠)$$

$$\therefore ص = -س + ٣ \quad \ldots\ldots\ldots (٢)$$

بحل المعادلتين (١)، (٢) نجد أن $س = ٣$، $ص = ٠$

$$\therefore \text{النقطة } ج \equiv (٣، ٠)$$

$$\text{بما أن } ج \text{ منتصف } \overline{أب} \text{ فإن } د \equiv (٠، ٣)$$

$$\therefore \text{طول } \overline{ج د} = \sqrt{(٣ - ٠)^٢ + (٠ - ٣)^٢} = \sqrt{١٨} = ٣\sqrt{٢} \text{ وحدة طول}$$

مثال (١٤)

في $\triangle أ ب ج$ إذا كان $ق(\angle أ) = ٣٠^\circ$، $ق(\angle ب) = ٤٥^\circ$، $ب ج = ٨$ سم

أوجد طول $\overline{أ ج}$

الحل

نرسم $\overline{ج د} \perp \overline{أ ب}$ فيتكون $\triangle ج د ب$ قائم الزاوية في $د$

$$\therefore \frac{ج د}{ب ج} = \text{جا } ٤٥^\circ \Rightarrow \frac{ج د}{٨} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \Rightarrow ج د = \frac{٨}{\sqrt{٢}} = ٤\sqrt{٢} \text{ سم}$$

$$\frac{د ب}{ب ج} = \text{جتا } ٤٥^\circ \Rightarrow \frac{د ب}{٨} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \Rightarrow د ب = \frac{٨}{\sqrt{٢}} = ٤\sqrt{٢} \text{ سم}$$

نلاحظ أن $\triangle ج د ب$ متطابق الضلعين فيكون $د ب = ج د = ٤\sqrt{٢}$ سم

$$\text{ظا } ٣٠^\circ = \frac{ج د}{أ د} \Rightarrow \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{٤\sqrt{٢}}{أ د} \Rightarrow أ د = ٤\sqrt{٦} \text{ سم}$$

$$\therefore أ ج = \sqrt{(٤\sqrt{٦})^٢ + (٤\sqrt{٢})^٢} = \sqrt{٩٦ + ٣٢} = \sqrt{١٢٨} = ٨\sqrt{٢} \text{ سم}$$

مثال (١٥)

إذا كان $ق(\angle أ) = ٣٠^\circ$، $ق(\angle ب) = ٤٥^\circ$، $ب ج = ٨$ سم

أوجد طول $\overline{أ ج}$

الحل

نرسم $\overline{ج د} \perp \overline{أ ب}$ فيتكون $\triangle ج د ب$ قائم الزاوية في $د$

$$\therefore \frac{ج د}{ب ج} = \text{جا } ٤٥^\circ \Rightarrow \frac{ج د}{٨} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \Rightarrow ج د = \frac{٨}{\sqrt{٢}} = ٤\sqrt{٢} \text{ سم}$$

$$\frac{د ب}{ب ج} = \text{جتا } ٤٥^\circ \Rightarrow \frac{د ب}{٨} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \Rightarrow د ب = \frac{٨}{\sqrt{٢}} = ٤\sqrt{٢} \text{ سم}$$

نلاحظ أن $\triangle ج د ب$ متطابق الضلعين فيكون $د ب = ج د = ٤\sqrt{٢}$ سم

$$\text{ظا } ٣٠^\circ = \frac{ج د}{أ د} \Rightarrow \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{٤\sqrt{٢}}{أ د} \Rightarrow أ د = ٤\sqrt{٦} \text{ سم}$$

$$\therefore أ ج = \sqrt{(٤\sqrt{٦})^٢ + (٤\sqrt{٢})^٢} = \sqrt{٩٦ + ٣٢} = \sqrt{١٢٨} = ٨\sqrt{٢} \text{ سم}$$

مثال (١٦)

إذا كان $ق(\angle أ) = ٣٠^\circ$، $ق(\angle ب) = ٤٥^\circ$، $ب ج = ٨$ سم

أوجد طول $\overline{أ ج}$

الحل

نرسم $\overline{ج د} \perp \overline{أ ب}$ فيتكون $\triangle ج د ب$ قائم الزاوية في $د$

$$\therefore \frac{ج د}{ب ج} = \text{جا } ٤٥^\circ \Rightarrow \frac{ج د}{٨} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \Rightarrow ج د = \frac{٨}{\sqrt{٢}} = ٤\sqrt{٢} \text{ سم}$$

$$\frac{د ب}{ب ج} = \text{جتا } ٤٥^\circ \Rightarrow \frac{د ب}{٨} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \Rightarrow د ب = \frac{٨}{\sqrt{٢}} = ٤\sqrt{٢} \text{ سم}$$

نلاحظ أن $\triangle ج د ب$ متطابق الضلعين فيكون $د ب = ج د = ٤\sqrt{٢}$ سم

$$\text{ظا } ٣٠^\circ = \frac{ج د}{أ د} \Rightarrow \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{٤\sqrt{٢}}{أ د} \Rightarrow أ د = ٤\sqrt{٦} \text{ سم}$$

$$\therefore أ ج = \sqrt{(٤\sqrt{٦})^٢ + (٤\sqrt{٢})^٢} = \sqrt{٩٦ + ٣٢} = \sqrt{١٢٨} = ٨\sqrt{٢} \text{ سم}$$

ج إذن يمكن إيجاد دالة تكاملية تحقق الدالة المعطاة

مثال (٢٤) إذا كان ميل مماس منحنى ما عند أي نقطة عليه يساوي $\frac{1}{2\sqrt{2x}}$ فأوجد معادلة هذا المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $(2\sqrt{2}, 3)$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \times \frac{(2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{2x} + c$$

$$\therefore 3 = \sqrt{2\sqrt{2}} + c \Rightarrow c = 1$$

$$\therefore y = \sqrt{2x} + 1$$

مثال (٢٥) أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة $(3, 25)$ علمًا بأن ميل المماس عند أي نقطة عليه يساوي ثلاثة أمثال مربع الإحداثي السيني لهذه النقطة.

الحل

ليكن (x, y) هو المنحنى المطلوب

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\therefore y = \frac{3}{3}x^3 + c = x^3 + c$$

$$\therefore 25 = 3^3 + c \Rightarrow c = 2$$

$$\therefore y = x^3 + 2$$

مثال (٢٦) أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة $(1, 2)$ علمًا بأن ميل المماس عند أي نقطة عليه يساوي $\frac{1}{2}$ مثلي الإحداثي السيني لهذه النقطة مطروحًا منه $\frac{3}{2}$.

الحل

ج إذن يمكن إيجاد دالة تكاملية تحقق المعادلة



∵ نهاية الدالة عند $س = ٣$ هى $ص = ٣$ هـ

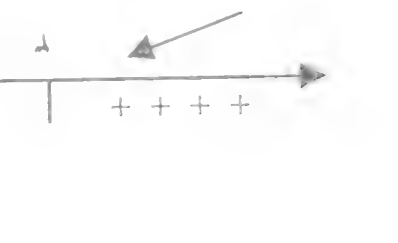
∵ نهاية البسط $= ٣ + ٣ = ٦$ هى المطلوبة لكى (١)

دلتا $= ب^{٢} - ٤ أ ج = ٩ - ٢٧ = -١٨$ ، ∵ $ب = -٣\sqrt{٢}$ هـ

نهاية البسط $= ٦ \times ٩ \times ١٨$

نهاية المقام $= \frac{٤ \times ٣ \times \sqrt{٣} \times ٣ \times \sqrt{٣} \times ٣ \times \sqrt{٣}}{٣}$

$= \frac{١}{٦ \times ٩ \times ١٨} = \frac{\sqrt{٣}}{٤ \times ١٨\sqrt{٣}} = \frac{\frac{١}{\sqrt{٣}}}{٣}$



∵ $ح = ف_{١} ع \times ٢ ف$ ..... (١)

$(٢\sqrt{٣})^{٢} = ف_{١}^{٢} + ف^{٢}$

$٢٧ = ف_{١}^{٢} + ف^{٢}$ ..... (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

$ح = ٢ ع ف (٢٧ - ف_{١}^{٢})$

$ح = ٥٤ ع ف - ٢ ف_{١}^{٣} ع$

$ح = ٥٤ ع ف - ٦ ف_{١}^{٣} ع$

بالتفاضل $=$ صفر

$\therefore$ صفر $= ٥٤ ع - ٦ ف_{١}^{٢} ع$

$\therefore$ صفر $= ٦ ع (٩ - ف_{١}^{٢}) \Longrightarrow$

$\therefore ف_{١}^{٢} = ٩ \Longrightarrow ف = ٣$ هـ

	$\therefore$ معادلة المماس $ص = ل$
	والمماس يوازى ف هـ حيث
	$\therefore$ ميل المماس $= ٠$
	$\therefore$ ميل نصف القطر $= \frac{-١}{٠}$
	$\therefore$ نصف القطر عمودى على ف هـ
	$\therefore$ نصف القطر $= ٢$ هـ
	$\therefore$ ل $= ٢$
	$\therefore$ معادلة المماس $ص = ٢$

$$\text{أ} = \text{ق}^{٢} + \frac{(\text{ق}\,٢ - ٦)^{٢}}{\pi} + \text{ق}^{٢} = \text{أ}$$

$$\text{أ} = \text{ق}^{٢} + \frac{(\text{ق}\,٢ - ٦)^{٢}}{\pi^{٢}} \cdot \pi$$

∴ محيط الدائرة = $\frac{\text{طول سلك المغناطيس}}{\text{عدد اللفات}} = \frac{(\text{ق}\,٢ - ٦)}{\pi}$ ق

$$\text{ح} = \text{ق}^{٢} + \text{ط}^{٢}\,\pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

∴ $\pi\,(\div ٢)$ ق $٤ = ١٢$

$$\text{ط}\,\pi + \text{ق}\,٢ = ٦ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

$$\text{ط} = \frac{(\text{ق}\,٢ - ٦)}{\pi} \text{ طول سلك المغناطيس} \quad \therefore$$

(١) أوجد أكبر مساحة ممكنة لقطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها ٢٠ م

الحل

نفرض أن طول قاعدة المستطيل = ق

∴ طول القاعدة + طول الارتفاع = $\frac{\text{المحيط}}{٢}$

∴ طول الارتفاع = $\frac{٢٠}{٢} - \text{ق} = ١٠ - \text{ق}$

∴ مساحة المستطيل = ق $(١٠ - \text{ق}) = ١٠\,\text{ق} - \text{ق}^{٢}$

$$\text{م} = ١٠\,\text{ق} - \text{ق}^{٢}$$

$$\frac{\text{م}}{\text{ق}} = ١٠ - ٢\,\text{ق}$$

$$\frac{\text{م}}{\text{ق}} = ٠ \Leftrightarrow ١٠ - ٢\,\text{ق} = ٠$$

$$\text{ق} = ٥$$

$$\frac{\text{م}^{٢}}{\text{ق}^{٢}} = -٢ < ٠$$

∴ م تأخذ قيمة عظمى عندما ق = ٥

∴ أكبر مساحة ممكنة = ٥ × ٥ = ٢٥ م^{٢}

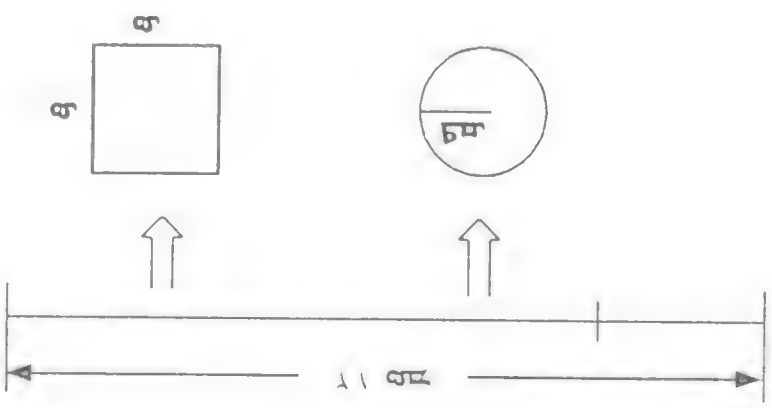
(٢) سلك طوله ٢٢ سم قطع إلى جزأين، كون من أحدهما مربعاً ومن الآخر دائرة. أوجد طول كل جزء حتى يكون مجموع مساحتي الشكلين أقل ما يمكن.

الحل

نفرض أن طول السلك المكون منه المربع = ق سم

∴ طول السلك المكون منه الدائرة = (٢٢ − ق) سم

∴ طول قطر الدائرة = $\frac{٢٢ - \text{ق}}{\pi}$ سم



∴ مجموع مساحتي الشكلين = مساحة المربع + مساحة الدائرة

تمرين ٣ - ٩

(١) إذكر طريقة ما:

أ) لإيجاد مركز دائرة تمر بثلاث نقط غير واقعة على استقامة واحدة.

ب) لإيجاد مركز دائرة معلومة طولها.

جـ) لرسم مماس لدائرة معلومة طولها عند نقطة واقعة عليها.

(٢) إذا كان $ص = \sqrt{٩ - س^٢}$ إذكر نوع المنحنى الذي يمثله ثم أوجد

قيمة $\frac{ص}{س}$ عندما $س = ٠$.

(٣) أوجد قيمة $\frac{ص}{س}$ عندما $س = \frac{\pi}{٤}$ حيث $ص = ٤ جتا ٢س$.

(٤) إذا كان $ص = ٤ جا ٣س + ٣ جتا ٣س$ فبرهن أن $\frac{د^٢ص}{دس^٢} + ٩ص = ٠$

ثم أوجد $\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ عندما $س = \frac{\pi}{٦}$

(٥) إذا كان $ص = ٢ جا ٣س + ٣ جتا ٣س$ فبرهن أن $\frac{د^٢ص}{دس^٢} + ٩ص = ٠$

ثم أوجد $\frac{د^٣ص}{دس^٣}$ عندما $س = \frac{\pi}{٦}$

$\therefore \frac{د^٢ص}{دس^٢} + ٩ص = ٠$

$\therefore \frac{د^٣ص}{دس^٣} = -٩ \times \frac{د ص}{د س}$

$= -٩ \times \frac{\pi}{٦}$

$= -\frac{٣\pi}{٢}$

$\therefore$ ميل المماس عند $س = \frac{\pi}{٤}$ هو $-\frac{٣\pi}{٢}$

$\therefore$ ميل العمودي $= \frac{٢}{٣\pi}$

$\therefore$ معادلة العمودي هي $ص - ٤ = \frac{٢}{٣\pi}(س - \frac{\pi}{٤})$

$\therefore ٣\pi ص - ١٢ = ٨س - ٢\pi$

$\therefore ٨س - ٣\pi ص + ٢\pi + ١٢ = ٠$

(٦) أوجد معادلة المماس لمنحنى $ص = ٣ جا ٢س$ عند $س = \frac{\pi}{٦}$

ثم أوجد قيمة $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ عند هذه النقطة.

جفهمهم ، لـ ٢ب مسهمة جسقة مولمة له ٢نلمهم ١٠٨ ٣٢

لاعم حولمة جمعلة جلمعلة ما جموه ولاجم جت مة جموه لمة مجلمة

جعلمة مة حضة لهمجة.

(١١) لاعم حولمة جلولمة ولمهنة مومجنة وسقة جلهصهة جحنة

م عولهم لـ جمسهمم جت مة جموه لمة مجلمة جمالمسهمة

جسقة مولمة له ٢نلمهم = ٤٢ ٨ هـ ٢

(١٢) له جمنة جناجهمة فمة ملم ٢للحمة مجهمة جمالمهم م سقة

حلهصهة جهكهسم ٢ب٢ مكهسم لهم مجنحة جلهصهة ولمهلم

حضة لهجهة. لاعم حولمة جمالمهم ما جموه ٢ب٢سهمة جسقة

مولمة حمجة مة جموه لمة مجلمة جمسهمة جمالمهم ٢٧ ٣

مومجنة قللة جمالجم ٦ هـ.

(٩) ولجنة سومجنة وسقة مومجة جولمجم ٣٧/٤٥ هـ. لاعم جهكهة

جلاه ولجنة ما جموه ولاجم جت مة جموه.

(١٠) مجلمة حلهصهة جهكهسم ٢ب٢ مكهسم ومجنة جلهصم ولمهة

(١١) لاعم ٢ب٢سهمة جسقة مولمة له ٢نلمهم ١٠٨ ٣٢

جفهمهم ، لـ ٢ب مسهمة جسقة مولمة له ٢نلمهم ١٠٨ ٣٢

لاعم حولمة جمعلة جلمعلة ما جموه ولاجم جت مة جموه لمة مجلمة

جعلمة مة حضة لهمجة.

(١١) لاعم حولمة جلولمة ولمهنة مومجنة وسقة جلهصهة جحنة

م عولهم لـ جمسهمم جت مة جموه لمة مجلمة جمالمسهمة

جسقة مولمة له ٢نلمهم = ٤٢ ٨ هـ ٢

(١٢) له جمنة جناجهمة فمة ملم ٢للحمة مجهمة جمالمهم م سقة

حلهصهة جهكهسم ٢ب٢ مكهسم لهم مجنحة جلهصهة ولمهلم

حضة لهجهة. لاعم حولمة جمالمهم ما جموه ٢ب٢سهمة جسقة

مولمة حمجة مة جموه لمة مجلمة جمسهمة جمالمهم ٢٧ ٣

فصل دوم

المقدمة

٤ . ١ مقدمة

٤ . ٢ لغة المقدمة

٤ . ٣ مقالة فيها المقدمة لا مقدمة

٤ . ٤ المقدمة مقدمة

٤ . ٥ جملة جامعة مانعة

٤ . ٦ مقدمة غير

٤ . ٧ مقدمة في حدّ طبقة جدّة لغة

٤ - ١ الدوال

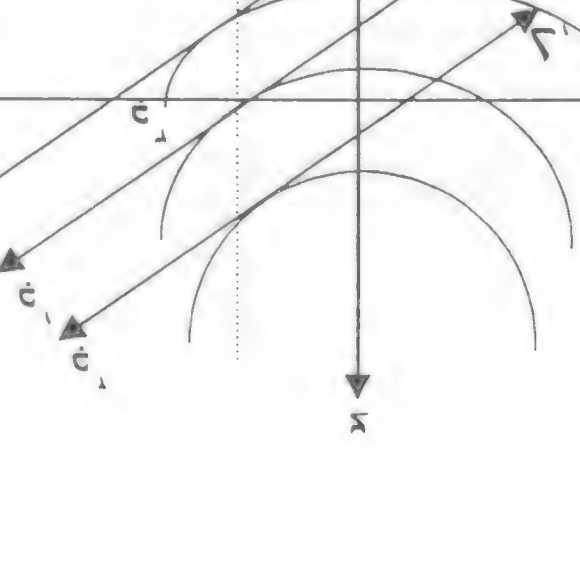
تعريف الدالة :

هي علاقة من المجموعة ﺱ إلى المجموعة ﺹ بحيث يرتبط كل عنصر من ﺱ بعنصر واحد فقط من ﺹ .

ﺱ هو مجال الدالة ، ﺹ هو المجال المقابل للدالة ، والعنصر الذي يرتبط بالعدد ﺱ = ١ هو ٢ = المدى المقابل للعدد ﺱ = ١

فإذا كان ﺱ ، ﺹ مجموعتين غير خاليتين وكان كل عنصر في ﺱ يرتبط بعنصر واحد فقط في ﺹ فإن هذا الارتباط يسمى دالة من ﺱ إلى ﺹ ويرمز لها بالرمز د : ﺱ ← ﺹ

مثال (١)



إذا كان د١ : ﺱ ← ﺹ حيث د١ (ﺱ) = ٣ ﺱ

د٢ (ﺱ) = ﺱ + ٢ ⟹ د٢ (ﺱ) = ٣ ﺱ + ٢

د (ﺱ) = ﺱ + ٨ ⟹ د (ﺱ) = ٣ ﺱ + ٨

إذا كان ٨ ∈ ح

مثال (٢)

إذا كان ﺱ ∈ ح (مجموعة الأعداد)

ج١ (ﺱ) = ٢ ﺱ

ج١ (ﺱ) = ﺱ + ٨ ⟹

ج٢ (ﺱ) = ﺱ - ٥ ⟹ ج٢ (ﺱ) = ٢ ﺱ

ج٣ (ﺱ) = ﺱ + ٣ ⟹ ج٣ (ﺱ) = ٢ ﺱ

ج١ (ﺱ) = ﺱ ⟹ ج١ (ﺱ) = ٢ ﺱ

حيث ج٠ دالة ثابتة

مثال (١)

دجد جبريا قاعدة الدالة د : ح ← ح حيث د (ﺱ) = ٣ ﺱ + ٢ ، ثم أوجد صورة العدد ٤ ، ٢ تحت تأثير الدالة د

صورة العدد ٤ هي العدد ١٤ ، صورة العدد ٢ هي العدد ٨ . حيث د (ﺱ) = ٢ ⟹ ﺱ = ٠

مثال (٢)

إذا كان د (ﺱ) = ٣ ﺱ + ٢ ، ﻫ (ﺱ) = ٢ ﺱ - ٣ فأوجد قيمة ﺱ التي تجعل د (ﺱ) = ﻫ (ﺱ)

د (ﺱ) = ﻫ (ﺱ) ⟹ ٣ ﺱ + ٢ = ٢ ﺱ - ٣

٣ ﺱ - ٢ ﺱ = - ٣ - ٢

ﺱ = - ٥

تمرين (٤ - ١)

١) إذا كان د (ﺱ) = ٢ ﺱ + ٣ ، ﻫ (ﺱ) = ﺱ + ٢ فأوجد قيمة ﺱ التي تجعل د (ﺱ) = ﻫ (ﺱ)

٢) إذا كان د (ﺱ) = ٣ ﺱ + ٢ ، ﻫ (ﺱ) = ٢ ﺱ - ٣ فأوجد قيمة ﺱ التي تجعل د (ﺱ) = ﻫ (ﺱ)

$$\int س^{ن} \, دس = \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + ك \quad حيث \; ن \neq -1 \; ، \; ك \in ح$$

مبرهنة (٣) يمكن حل كل المعادلات من الصورة :

$$\int س^{٥} \, دس = \frac{س^{٥+1}}{٥+1} + ك = \frac{١}{٦} س^{٦} + ك \quad (١)$$

$$\int س^{-٧} \, دس = \frac{س^{-٧+1}}{-٧+1} + ك = \frac{١}{-٦ س^{٦}} + ك \quad (٢)$$

حيث ن ، ك ثوابت حقيقية

ملاحظة

(١) إذا كان : $ص_{١} = س^{٢}$ ، $ص_{٢} = س^{٢} + ٢$ ، ..... ، $ص_{ن} = س^{٢} + ك$

ثوابت التكامل في كل منها مختلفة

ولكن $\frac{دص_{١}}{دس} = \frac{دص_{٢}}{دس} = \ldots = \frac{دص_{ن}}{دس} = ٢س$

(٢) إذا كان : $ص_{١} = س^{٢}$ ، $ص_{٢} = س^{٢} + ٢$ ، ..... ، $ص_{ن} = س^{٢} + ك$

$\frac{دص_{١}}{دس} = \frac{دص_{٢}}{دس} = \ldots = \frac{دص_{ن}}{دس} = ٢س$

ولكن $ص_{١} \neq ص_{٢} \neq \ldots \neq ص_{ن}$

ثوابت التكامل في كل منها مختلفة

(٣) إذا كان : $ص_{١} = س^{٢}$ ، $ص_{٢} = س^{٢} + ٢$ ، ..... ، $ص_{ن} = س^{٢} + ك$

$\frac{دص_{١}}{دس} = \frac{دص_{٢}}{دس} = \ldots = \frac{دص_{ن}}{دس} = ٢س$

ولكن $ص_{١} \neq ص_{٢} \neq \ldots \neq ص_{ن}$

ثوابت التكامل في كل منها مختلفة

(٤) إذا كان : $ص_{١} = ٢س$ ، $ص_{٢} = ٢س + ٢$ ، ..... ، $ص_{ن} = ٢س + ك$

$\frac{دص_{١}}{دس} = \frac{دص_{٢}}{دس} = \ldots = \frac{دص_{ن}}{دس} = ٢$

ولكن $ص_{١} \neq ص_{٢} \neq \ldots \neq ص_{ن}$

ثوابت التكامل في كل منها مختلفة

(٥) إذا كان : $ص_{١} = ٢س$ ، $ص_{٢} = ٢س + ٢$ ، ..... ، $ص_{ن} = ٢س + ك$

$\frac{دص_{١}}{دس} = \frac{دص_{٢}}{دس} = \ldots = \frac{دص_{ن}}{دس} = ٢$

ولكن $ص_{١} \neq ص_{٢} \neq \ldots \neq ص_{ن}$

ثوابت التكامل في كل منها مختلفة

(٦) إذا كان : $ص_{١} = ٢$ ، $ص_{٢} = ٢ + ٢$ ، ..... ، $ص_{ن} = ٢ + ك$

$\frac{دص_{١}}{دس} = \frac{دص_{٢}}{دس} = \ldots = \frac{دص_{ن}}{دس} = ٠$

ولكن $ص_{١} \neq ص_{٢} \neq \ldots \neq ص_{ن}$

ثوابت التكامل في كل منها مختلفة

مبرهنة (٤)

إذا كان : $ص_{١} = ص_{١}(س)$ ، $ص_{٢} = ص_{٢}(س)$ ، ..... ، $ص_{ن} = ص_{ن}(س)$

فإن : $\frac{دص_{١}}{دس} = \frac{دص_{٢}}{دس} = \ldots = \frac{دص_{ن}}{دس}$

إذا وفقط إذا كان : $ص_{١} = ص_{٢} + ك_{١} = ص_{٣} + ك_{٢} = \ldots = ص_{ن} + ك_{ن-١}$

حيث $ك_{١} ، ك_{٢} ، \ldots ، ك_{ن-١}$ ثوابت

البرهان

نفرض أن $\frac{دص_{١}}{دس} = \frac{دص_{٢}}{دس} = \ldots = \frac{دص_{ن}}{دس} = ق(س)$

حيث ق(س) دالة متصلة في الفترة المغلقة [أ ، ب]

ومن تعريف التكامل غير المحدود نجد أن :

$ص_{١} = \int ق(س) \, دس = ق_{١}(س) + ك_{١}$

$ص_{٢} = \int ق(س) \, دس = ق_{٢}(س) + ك_{٢}$

$ص_{ن} = \int ق(س) \, دس = ق_{ن}(س) + ك_{ن}$

حيث $ق_{١}(س) ، ق_{٢}(س) \ldots ، ق_{ن}(س)$

فإن $ق_{١}(س)$ ، $ق_{٢}(س) \ldots ، ق_{ن}(س)$

هي دوال أصلية للدالة المتصلة ق(س) في الفترة [أ ، ب]

ومن تعريف الدالة الأصلية نجد أن :

$ق_{٢}(س) = ق_{١}(س) + ك$

حيث $ك = ك_{٢} - ك_{١}$ ثابت

لكل قيمة من قيم س في الفترة [أ ، ب] إذا كان $ق_{٢}(س)$ ، $ق_{١}(س)$

كل منهما دالة أصلية للدالة ق(س) في الفترة [أ ، ب]

فإن $ق_{٢}(س) - ق_{١}(س) = ك$ حيث ك ثابت

$ق_{٢}(س) = ق_{١}(س) + ك$

$ق_{٣}(س) = ق_{١}(س) + ك$

$ق_{ن}(س) = ق_{١}(س) + ك$

$ق_{٢}(س) - ق_{١}(س) = ك$

$ق_{٣}(س) - ق_{١}(س) = ك$

$ق_{ن}(س) - ق_{١}(س) = ك$

$ق_{٢}(س) - ق_{١}(س) = ق_{٣}(س) - ق_{١}(س) = \ldots = ق_{ن}(س) - ق_{١}(س)$

$ق_{٢}(س) = ق_{٣}(س) = \ldots = ق_{ن}(س)$

$ق_{٢}(س) = ق_{٣}(س) + ك_{١} = ق_{٤}(س) + ك_{٢} = \ldots = ق_{ن}(س) + ك_{ن-٢}$

$ق_{١}(س) = ق_{٢}(س) + ك_{١} = ق_{٣}(س) + ك_{٢} = \ldots = ق_{ن}(س) + ك_{ن-١}$

$ص_{١} = ص_{٢} + ك_{١} = ص_{٣} + ك_{٢} = \ldots = ص_{ن} + ك_{ن-١}$

حيث $ك_{١} ، ك_{٢} ، \ldots ، ك_{ن-١}$ ثوابت

ملاحظة

إذا كان $\frac{دص_{١}}{دس} = \frac{دص_{٢}}{دس}$ فإن $ص_{١} = ص_{٢} + ك$ حيث ك ثابت

أي أن $ص_{١} - ص_{٢} = ك$ حيث ك ثابت

فإذا كان $ص_{١} = ٢س^{٢}$ ، $ص_{٢} = ٢س^{٢} + ٥$

فإن $ص_{١} - ص_{٢} = -٥$ حيث -٥ ثابت

$\frac{دص_{١}}{دس} = ٤س$ ، $\frac{دص_{٢}}{دس} = ٤س$

$\frac{دص_{١}}{دس} = \frac{دص_{٢}}{دس}$

$$= \int \frac{(س+٣)}{(س+٤)(س+٣)} \, ب س = \int \frac{ب س}{س+٤} = \ln|س+٤| + ل$$

$$\text{د) } \int \frac{س^{٢}+٢س+٤}{س^{٣}+٤س^{٢}+٣س} \, ب س = \int \frac{(س+١)^{٢}+٣}{س(س+١)(س+٣)} \, ب س$$

$$= \int \left(\frac{أ}{س} + \frac{ب}{س+١} + \frac{ج}{س+٣} \right) ب س$$

$$أ(س+١)(س+٣) + ب س(س+٣) + ج س(س+١) = (س+١)^{٢}+٣$$

$$س = ٠ \Rightarrow ٣أ = ٤ \Rightarrow أ = \frac{٤}{٣}$$

$$س = -١ \Rightarrow ب = \frac{١}{٢}$$

$$س = -٣ \Rightarrow ج = \frac{١٣}{٦}$$

$$= \frac{٤}{٣} \ln|س| + \frac{١}{٢} \ln|س+١| + \frac{١٣}{٦} \ln|س+٣| + ل$$

تذكير $ن \neq ٢$

$$\text{هـ) } \int \frac{ب س}{س^{ن}-٢^{ن}} = \int \frac{ب س}{(س-٢)(س+٢)(س^{٢}+٤)}$$

$$= \int \left(\frac{أ}{س-٢} + \frac{ب}{س+٢} + \frac{ج س + د}{س^{٢}+٤} \right) ب س$$

$$أ(س+٢)(س^{٢}+٤) + ب(س-٢)(س^{٢}+٤) + (ج س + د)(س-٢)(س+٢) = ١$$

$$س = ٢ \Rightarrow ٣٢أ = ١ \Rightarrow أ = \frac{١}{٣٢}$$

$$س = -٢ \Rightarrow -٣٢ب = ١ \Rightarrow ب = -\frac{١}{٣٢}$$

$$س = ٠ \Rightarrow ٨أ - ٨ب - ٤د - ٢د = ١$$

$$\Rightarrow ٤د = ١ - ٨أ + ٨ب - ٢د$$

$$\Rightarrow ٦د = \frac{١}{٤} - ٢أ + ٢ب$$

$$س = ١ \Rightarrow ٥أ - ٣ب + ٣ج + ٣د + ٤د = ١$$

$$\Rightarrow ٣ج + ٧د = ١ - ٥أ + ٣ب$$

$$\Rightarrow ٣ج + ٧د = \frac{٣}{٤} - ٧أ + ٧ب$$

$$\Rightarrow ٣ج = \frac{٣}{٤} - ٧أ + ٧ب - ٧د$$

$$\Rightarrow ٣ج = \frac{٣}{٤} - ٧أ + ٧ب - \frac{٧}{٦} + ٧أ - ٧ب$$

$$\Rightarrow ٣ج = \frac{١٣}{٦} \Rightarrow ج = \frac{١٣}{١٨}$$

$$= \frac{١}{٣٢} \ln|س-٢| - \frac{١}{٣٢} \ln|س+٢| + \frac{١٣}{١٨} \ln|س^{٢}+٤| + ل$$

٤ - ٢ دَمْج لِمَا لَا تَحْدِيدَ لَهُ مِنَ الدَّوَالّ

مَبْدَأ $\int ب(س)$ دَالَّةٌ لَا تَحْدِيدَ لَهَا.

يُسْتَعَانُ بِذَلِكَ فِي إِيجَادِ دَالَّةٍ مَكَامِلَةٍ لَا تَمُرُّ مَعْرِفَةٌ بِأَيِّ طَرِيقٍ يَدَوِيٍّ فَيَتِمُّ الْتَّوَصُّلُ عَلَى دَالَّةٍ مَجْهُولَةٍ لَا تَحْدِيدَ لَهَا يُمْكِنُ حَلُّهَا عَنْ طَرِيقِ مُعَادَلَةٍ تَفَاضُلِيَّةٍ.

$$\text{١) } \int ل \, ب(س) \, ب س = ل \int ب(س) \, ب س \quad \text{حَيْثُ } ل \in ح$$

$$\text{٢) } \int [\, ب(س) \pm م(س) \,] \, ب س = \int ب(س) \, ب س \pm \int م(س) \, ب س \quad \text{وَبِالتَّالِي يُمْكِنُ تَجْزِئَةُ أَيِّ}$$

يُمْكِنُ لِأَيِّ دَالَّةٍ مَهْمَا كَانَتْ مِنْ أَيِّ نَوْعٍ دَالَّةٍ أَنْ تُجَزَّأَ :

الطَّرِيقَةُ (٤) يَرْجَعُ لَكَ مَا أَعْطَاكَ إِيَّاهُ :

$$\text{أ) } \int (س^{٢}+٣)(س-٤) \, ب س$$

$$= \int (١٢ - ٤س^{٢} + ٣س^{٣} - س^{٤}) \, ب س$$

$$= ١٢س - \frac{٤}{٣}س^{٣} + \frac{٣}{٤}س^{٤} - \frac{١}{٥}س^{٥} + ل$$

$$\text{ب) } \int \frac{ب س}{\sqrt{س+٥}} = \int (س+٥)^{-\frac{١}{٢}} \, ب س$$

$$= ٢\sqrt{س+٥} + ل$$

$$\text{ج) } \int \sqrt{س^{٣}} \, ب س = \int س^{\frac{٣}{٢}} \, ب س = \frac{٢}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} + ل$$

$$\text{د) } \int \frac{ب س}{س^{٢}-١} = \int \frac{ب س}{(س-١)(س+١)} = \int \left(\frac{أ}{س-١} + \frac{ب}{س+١} \right) ب س$$

$$أ(س+١) + ب(س-١) = ١$$

$$س = ١ \Rightarrow ٢أ = ١ \Rightarrow أ = \frac{١}{٢}$$

$$س = -١ \Rightarrow -٢ب = ١ \Rightarrow ب = -\frac{١}{٢}$$

$$= \frac{١}{٢} \ln|س-١| - \frac{١}{٢} \ln|س+١| + ل$$

$$= \frac{١}{٢} \ln \left| \frac{س-١}{س+١} \right| + ل$$

$$\text{هـ) } \int \frac{ب س}{س^{٢}+٢س+٥} = \int \frac{ب س}{(س+١)^{٢}+٤}$$

$$= \frac{١}{٢} \tan^{-١} \left(\frac{س+١}{٢} \right) + ل$$

$$\text{و) } \int \frac{ب س}{\sqrt{٤-(س-١)^{٢}}} = \int \frac{ب س}{\sqrt{٤-س^{٢}+٢س-١}}$$

$$= \int \frac{ب س}{\sqrt{٣+٢س-س^{٢}}}$$

$$= \sin^{-١} \left(\frac{س-١}{٢} \right) + ل$$

(٢) $\int \frac{\text{جتا}\, ٢س}{\text{جا}^{٣}\, ٢س}\, د س = -\frac{١}{٤}\, \text{قا}^{٢}\, ٢س + ج$

(٣) إيجاد ما يأتي :

(أ) $\int (\text{جتا}\, س)_{٥} (\text{جا}\, س)_{٢}\, د س = \frac{١}{٦} (\text{جا}\, س)_{٦} + ج$

(ب) $\int (\text{جا}\, س)_{٤} (\text{جتا}\, س)\, د س = \frac{١}{٥} (\text{جتا}\, س)_{٥} + ج$

$= -\frac{١}{٣} \int (٥ - س^{٢})^{\frac{-١}{٢}} (-٣ س^{٢})\, د س = -\frac{١}{٣} \times \frac{٢}{١} (٥ - س^{٢})^{\frac{١}{٢}} + ج$

(ج) $\int (٥ س^{٢})^{\frac{-١}{٢}} س^{٢}\, د س$

(د) $\int (س^{٣} + ٣)^{٣} (٢ س)\, د س = \frac{١}{٤} (س^{٣} + ٣)^{٤} + ج$

تمرين ٢

(١) $\int (\text{جتا}\, س)_{٥} (\text{جا}\, س)_{٢}\, د س$

(ب) $\int (\text{جا}\, س)_{٤} (\text{جتا}\, س)\, د س$

(ج) $\int \frac{\sqrt{٥ - س^{٢}}^{٥}}{س^{٢}}\, د س$

(د) $\int (س^{٣} + ٣)^{٣} (٢ س)\, د س$

الحل (٥) نفرض أن $ص = \text{إيجاد ما يأتي}$:

$= \frac{[\, ع (س)\,]^{ن + ١}}{ن + ١} + ج$ حيث $ن \neq -١$

(٣) $\int [\, ع (س)\,]^{ن} \cdot ع' (س)\, د س$

(٢) إيجاد ما يأتي :

$= \frac{١}{٤} س^{٤} + \frac{٣}{٣} س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٨ س + ج$

$$= -\cos^{-1} x + c$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos^{-1} x)\, 2\, dx$$

$$\text{٥) } \int \cos^{-1} x \left(\frac{x^2}{-1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\cos^{-1} x^2 + c$$

$$\text{٤) } \int -\sin^{-1} x \cos^{-1} x\, dx = \frac{1}{-1}\sin^{-1} x + c$$

$$\text{٣) } \int 1 \sin^{-1} x \cos^{-1} x\, dx = \frac{1}{1}\sin^{-1} x + c$$

$$= \frac{1}{8}\cos^{-1} 0 + c$$

$$\text{٢) } \int 8 \cos^{-1} 0\, dx = \Rightarrow 8\int \cos^{-1} x\, dx$$

$$\text{١) } \int \cos^{-1} 3\, dx = \frac{3}{1}\cos^{-1} x + c$$

تدرب ٢

$$\text{ج) } \int \frac{\sqrt{x}}{\cos^{-1}\sqrt{x}}\, dx$$

$$\text{ب) } \int -\sin^{-1} 2\, x \cos^{-1} x\, dx$$

$$\text{أ) } \int \sin^{-1} x\, dx$$

الإجابة (٦) يتضح مما سبق أن الصورة العامة هي :

$$\text{ح) } \int \sin^{-1} 2\, x \cos^{-1} x\, dx = -\frac{2}{1}\sin^{-1} 2\, x + c$$

$$\text{د) } \int \cos^{-1} 2\, x\, dx = -\frac{2}{1}\cos^{-1} 2\, x + c$$

$$\text{ب) } \int \sin^{-1} 2\, x\, dx = -\frac{2}{1}\sin^{-1} 2\, x + c$$

$$\text{أ) } \int \cos^{-1} 2\, x\, dx = -\frac{2}{1}\cos^{-1} 2\, x + c$$

$$\int \cos^2 4\theta \, d\theta = \frac{1}{4}\int (1 + \cos 8\theta)\, d\theta$$

$$(1) \int \cos^2 4\theta \, d\theta = \frac{1}{4}(1 + \cos 8\theta)$$

الحل

$$(2) \int \cos^2 4\theta \, d\theta$$

$$(1) \int \cos^2 4\theta \, d\theta$$

مثال (7) أوجد كلا من التكاملات الآتية :

$$= \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right) + c$$

$$\int \cos^2 4\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 8\theta)\, d\theta$$

حل آخر

$$= \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right) + c$$

$$\text{بفرض أن } \int \cos^2 4\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 8\theta)\, d\theta$$

$$\cos 4\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 8\theta)$$

$$\because \cos^2 4\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 8\theta)$$

$$= 2\cos^2 4\theta - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 4\theta$$

$$\cos 8\theta = \cos^2 4\theta - \sin^2 4\theta$$

(٥) أوجد قيمة كل من التكاملات الآتية :

مـ١ : إذا كان ق كثيرة حدود فأوجد ق(ك) :

أ) ∫ (ك + ١) د ك

ب) ∫ (٣ك٢ + ٤) د ك

جـ) ∫ (٥ + ٣√ك) د ك

مـ٢ : إذا كان ق كثيرة حدود فأوجد ق(ك) علمًا بأن :

أ) ∫ ق(ك) د ك = ك٣ + ك٢ + ك + ٥

ب) ∫ ق(ك) د ك = ك٤ + ك٣ + ك٢ + ٧ ك + ٢

جـ) ∫ ق(ك) د ك = ٣ك٢ + ٢ك + ١٢ ، ق(١) = ٢١

د) ∫ ق(ك) د ك = ٤ك٣ + ٣ك٢ + ٢ك + ٤ ، ق(٠) = ٣

هـ) ∫ ق(ك) د ك = ٢ك٣ + ٣ك٢ + ٤ك + ٥ ، ق(٠) = ٢

و) ∫ ق(ك) د ك = ٣ك٢ + ٢ك + ٥ ، ق(١) = ٩

ز) ∫ ق(ك) د ك = ٤ك٣ + ٣ك٢ + ٢ك + ٥ ، ق(٠) = ٣

مـ٣ : إذا كان ق كثيرة حدود فأوجد :

أ) ∫ ق(ك) د ك = ك٣ + ٣ك٢ + ٥ ، ق(١) = ٢

ب) ∫ ق(ك) د ك = ك٤ + ٢ك٣ + ٣ك٢ + ٤ك + ٥ ، ق(٠) = ٣

جـ) ∫ ق(ك) د ك = ٤ك٣ + ٣ك٢ + ٢ك + ٥ ، ق(١) = ٢

د) ∫ ق(ك) د ك = ٣ك٢ + ٢ك + ٥ ، ق(١) = ٩

هـ) ∫ ق(ك) د ك = ٤ك٣ + ٣ك٢ + ٢ك + ٥ ، ق(٠) = ٣

و) ∫ ق(ك) د ك = ٢ك٣ + ٣ك٢ + ٤ك + ٥ ، ق(٠) = ٢

ز) ∫ ق(ك) د ك = ٣ك٢ + ٢ك + ٥ ، ق(١) = ٩

مـ٤ : إذا كان ق كثيرة حدود فأوجد ق(ك) علمًا بأن :

أ) ∫ ق(ك) د ك = ك٣ + ٣ك٢ + ٥ ، ق(١) = ٢

ب) ∫ ق(ك) د ك = ك٤ + ٢ك٣ + ٣ك٢ + ٤ك + ٥ ، ق(٠) = ٣

جـ) ∫ ق(ك) د ك = ٤ك٣ + ٣ك٢ + ٢ك + ٥ ، ق(١) = ٢

د) ∫ ق(ك) د ك = ٣ك٢ + ٢ك + ٥ ، ق(١) = ٩

هـ) ∫ ق(ك) د ك = ٤ك٣ + ٣ك٢ + ٢ك + ٥ ، ق(٠) = ٣

و) ∫ ق(ك) د ك = ٢ك٣ + ٣ك٢ + ٤ك + ٥ ، ق(٠) = ٢

ز) ∫ ق(ك) د ك = ٣ك٢ + ٢ك + ٥ ، ق(١) = ٩

تمارين ٤ - ١

أ) $\int \frac{د س}{س^{٢}}$

ب) $\int \frac{د ك}{\sqrt{ك}}$

جـ) $\int ٥ س^{٣} د س$

د) $\int ٣ ك^{-٢} د ك$

هـ) $\int ١٢ ك^{٣} د ك$

و) $\int (٣ ك + ٥)^{٢} د ك$

ز) $\int ٤ (٣ ك + ٤)^{٣} د ك$

ح) $\int \frac{٣}{(٢ ك + ٥)^{٢}} د ك$

ط) $\int \frac{٤}{(٣ ك + ٤)^{٣}} د ك$

ى) $\int \frac{٢}{(٣ ك + ٥)^{٢}} د ك$

ك) $\int \frac{٣}{(٤ ك + ٥)^{٣}} د ك$

ل) $\int \frac{٢}{(٣ ك + ٤)^{٣}} د ك$

م) $\int \frac{٣}{(٢ ك + ٥)^{٢}} د ك$

ن) $\int \frac{٤}{(٣ ك + ٤)^{٣}} د ك$

س) $\int \frac{٢}{(٣ ك + ٥)^{٢}} د ك$

ع) $\int \frac{٣}{(٤ ك + ٥)^{٣}} د ك$

ف) $\int \frac{٢}{(٣ ك + ٤)^{٣}} د ك$

ص) $\int \frac{٣}{(٢ ك + ٥)^{٢}} د ك$

ق) $\int \frac{٤}{(٣ ك + ٤)^{٣}} د ك$

ر) $\int \frac{٢}{(٣ ك + ٥)^{٢}} د ك$

ش) $\int \frac{٣}{(٤ ك + ٥)^{٣}} د ك$

ت) $\int \frac{٢}{(٣ ك + ٤)^{٣}} د ك$

ث) $\int \frac{٣}{(٢ ك + ٥)^{٢}} د ك$

خ) $\int \frac{٤}{(٣ ك + ٤)^{٣}} د ك$

ذ) $\int \frac{٢}{(٣ ك + ٥)^{٢}} د ك$

ض) $\int \frac{٣}{(٤ ك + ٥)^{٣}} د ك$

ظ) $\int \frac{٢}{(٣ ك + ٤)^{٣}} د ك$

غ) $\int \frac{٣}{(٢ ك + ٥)^{٢}} د ك$

ف) $\int \frac{٤}{(٣ ك + ٤)^{٣}} د ك$

ق

س۳ : إحسب كلا من التكاملات التالية :

أ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} \, d\theta$

ب) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos \theta)(\sin \theta) \, d\theta$

ج) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{(3 + \cos \theta)^2} \, d\theta$

د) $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{(2x^3 - 5)^2} \, dx$

هـ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\sin \theta + 7} \, d\theta$

س٤ : إحسب كلا من التكاملات التالية :

أ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\sqrt{\tan \theta}} \, d\theta$

ب) $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{(1 + 2x^3 + x^6)^5} \, dx$

ج) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos \theta - 3\sin \theta + 1) \, d\theta$

د) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{7 + \sin \theta}} \, d\theta$

هـ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{3 + \sin \theta}} \, d\theta$

و) $\int_{0}^{\frac{\pi}{12}} \sec^2 3\theta \, d\theta$

ز) $\int_{0}^{1} (1 + 2x)(5 + 2x^2)^3 \, dx$

ح) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{(3 + \cos \theta)^2} \, d\theta$

ط) $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^3}} \, dx$

س٦ : إذكر هل كل تكامل مما يأتي :

ا) $\int$ ٧ لتا ٤ س دس

ب) $\int$ لتا (٢ + ب) س دس

ج) $\int$ لتا (−٨ ع) دع

د) $\int$ (لتا (−٥ س) دس

هـ) $\int$ (لتا ٢ س + لتا ٤ س)دس

و) $\int$ (لتا ٥ + س)٢ دس

ز) $\int$ (لتا ٢ س + ١)٣ دس

س٧ : إذكر هل كل تكامل مما يأتي :

ا) $\int$ لتا ٢ س لتا ٣ س دس

ب) $\int$ لتا ٢ س لتا ٣ س دس

$ص = ق(س) \cdot س_{٢} + ٩$

الحوفة (٩) إذا كانت جفرية البدء حل (س ، ص) من معادلة ما فإن $(٢س-٤)$ ، فإذا أدى توالي متواليتين إلى مقدار ثابت (س) . تسمى المقدار الناتج .

الحل

$ص = (٢س-٤)$

عند إذا أدى توالي متواليتين إلى مقدار ثابت (س) = $-٥ \Leftarrow$

$ص = ٠ \Leftarrow ٢س-٤ = ٠ \Leftarrow س = ٢ \Leftarrow$

معادلة جزيئية ، لها جفرية جفرية (٢ ، -٥) فإن من معادلة

جفرية $\Leftarrow$ غير لذا

$ص = \int (٢س-٤) جـ س \Leftarrow$

$ص = س_{٢} - ٤س + ل \Leftarrow$

$-٥ = ٤ - ٨ + ل \Leftarrow ل = -١ \Leftarrow$

$ص = ق(س) = س_{٢} - ٤س - ١$ معادلة جفرية

الحوفة (٨) إذا كانت جفرية البدء حل معادلة (س ، ص) من معادلة فإن

(أ) إذا جفرية جفرية $ص = ق(س) = ٥١س_{٢}$

$\int جـ ص = \int ٥١ س_{٢} جـ س \Leftarrow$

$ص = ٥ س_{٣} + ل$

معادلة جفرية مرور بالنقطة $(-١ ، ٤)$ ، $(-١ ، ٩٤)$ غير لمعادلة

$\Leftarrow ٤ = -٥ + ل \Leftarrow ل = ٩$

معادلة جفرية هو :

$ص = ٥ س_{٣} + ٩$

٤ - ٣ - ١ طريقة أويلر التقريبية

٤ - ٣ طريقة فريدة بل لمعادلة لا حدية

تسمى $\int ق(س) جـ س = ق(س) + ل$ ، حيث ل ثابت طريقة جفرية

طريقة أويلر لمعادلة لتفاضلية لتي على طريقة متواليتين إلى حل

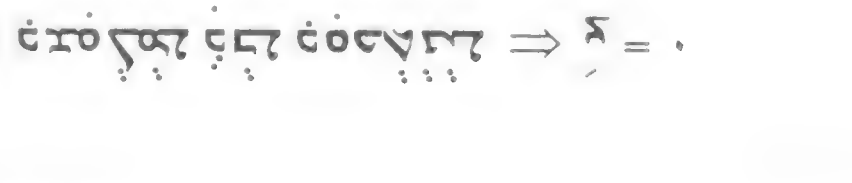
حيث يمكن إيجاد ثابت من تلك الطريقة :

د(−١) = ٤ ⇒ (−١ ، ٤) نقطة حرجة فيتا فيها

د(−١) = ٤ ⇒ (−١ ، ٤) نقطة عظمى

فترة التزايد (١ ، ∞) {س : س > ١}

فترة التناقص ٢) {س : س < −١}



إشارة د´(س)

١) د(س) = س٣ − ٣س + ٢

٢) مجال د = ح

٣) لا يوجد تماثل حول المحور ص ولا حول نقطة الأصل

٤) د´(س) = ٣س٢ − ٣ = ٠ ⇒ س = ± ١ ⇒ د (١) = ٠ ⇒ (١ ، ٠) نقطة حرجة

د(−١) = ٤ ⇒ (−١ ، ٤) نقطة عظمى

د(١) = ٠ ⇒ (١ ، ٠) نقطة حرجة

فترة التزايد (−∞ ، −١) ∪ (١ ، ∞) {س : س < −١ أو س > ١}

فترة التناقص (−١ ، ١) {س : −١ < س < ١}

د(−١) = ٤ ⇒ (−١ ، ٤) نقطة عظمى

د(١) = ٠ ⇒ (١ ، ٠) نقطة حرجة

| مثال |

١) ص = ∫ ٦س د س ⇒ ص = ٣س٢ + ل١

ص = ٠ ⇒ ٠ = ٣ + ل١ ⇒ ل١ = −٣

ص = ٣س٢ − ٣

ص = ∫ (٣س٢ − ٣) د س

ص = س٣ − ٣س + ل٢

(−١ ، ٤) ∈ د ⇒ نقطة المعطاة ⇒

٤ = −١ + ٣ + ل٢ ⇒ ل٢ = ٢ ⇒

د(س) = س٣ − ٣س + ٢ = (س − ١)٢ (س + ٢)

ص = د (س) = س٣ − ٣س + ٢ = (س − ١)٢ (س + ٢)

| تمرين (٠ ، ١) |

١٠ منحنى المشتقة الأولى ص = (٦س) ومعطى (−١ ، ٤)

معنى معادلة ترجمة تحت تحدث الأولى :

١) تحديد المجال

٢) الأعداد حرجة وتصنيفها إلى منحنى تزايد متناقص

تحديد الأولى :

$$\frac{١}{٢}\,ك_{١} = \frac{١}{٣}\,ك_{٣} - ك + ٨ \Longrightarrow$$

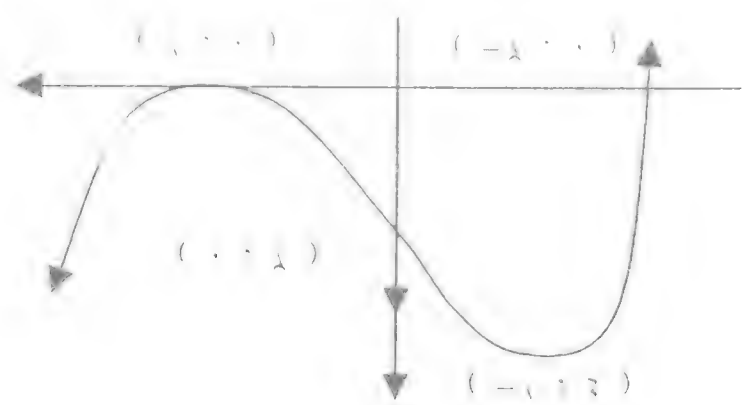
$$\int \frac{١}{٢}\,ك\,د ك = \int (ك - ١)\,د ك$$

$$\frac{د\,ك}{د\,ك} = \frac{ك}{ك - ١} \Longrightarrow$$

تذكير إذا كان $(ك\ ،\ ك)$ في تناسب طردي فإن $\frac{ك}{ك - ١}$

مثال (١١) إذا كان $(٣\ ،\ ٥)$ أحد أزواج تناسب طردي فأوجد $(٤\ ،\ ك)$ ثم ارسم

$(٤\ ،\ ٣-)$ المقطع



الحل $\because$ المقطع $(٤\ ،\ ٣-)$ يمر بربع واحد فقط

$\therefore$ المجال $= \{ ك : ك > ٠ \}$

المدى $= \{ ك : ك < ٠ \}$

	المجال	المدى
إشارة $ق(ك)$	+++++++++	---------

$$ق(ك) = ٦ك = ٠ \quad ك = ٠ \ ،\ ق(٠) = ٢$$

(١ ، ٠) نقطة حرجة ونهاية صغرى

$$\text{لأن } (١\ ،\ ٠) \text{ ، } (-٢\ ،\ ٠) \text{ نقطة قيم لنهاية صغرى}$$

$$\text{لأن } (٠\ ،\ ٢) \text{ نقطة قيم لنهاية كبرى}$$

$$\text{لإيجاد } ك = ٠ \Longrightarrow (ك - ١)^{٢}(ك + ٢) = ٠$$

$$\therefore ك = ١ \text{ أو } ك = -٢$$

٦) فترات التقعر والتحدب :

$$\text{لإيجاد } ق = ٠ \Longrightarrow ك = ٢$$

$$\text{لأن } (٠\ ،\ ٢) \text{ نقطة قيم لنقطة انعطاف}$$

$$\text{لإيجاد } ك = ٠ \Longrightarrow (ك - ١)^{٢}(ك + ٢) = ٠$$

$$\therefore ك = ١ \text{ أو } ك = -٢$$

∴ ق متصلة على كل من : $\{س : س > ٠\}$ ، $\{س : س < ٠\}$

؛) $ن = \frac{س^{٢}}{١}$ ، $س \neq ٠$ ، $ن > ٠$ على $\{س : س > ٠\}$ ، $\{س : س < ٠\}$

٣) $س = ٠$ لأن المشتقة غير معرفة ، $ن = \frac{٢}{٧}$ لأن المشتقة لا تساوي

٢) لأنها متماثلة حول $ص$ $\quad -ق(-س) \neq ق(س)$ ، $ق(-س) \neq ق(س)$

١) مجموعة تعريف الدالة في ط هي $ط / \{٠\}$

$$ن = ق(س) = \frac{٢س}{٧س - ٢}$$

$$ن = \frac{٢}{٧} - \frac{س}{١} = \frac{٢س}{٧س - ٢}$$

$$\Leftarrow \frac{٢}{٧} = \Rightarrow \quad ن = -\frac{٢}{١} + ل$$

$$\Leftarrow ن = -\frac{س}{١} + ل \Rightarrow$$

$$\therefore \int ق\, ن = \int س - ٢ \cdot ق س \Rightarrow$$

حيث

حيث ثابت التكامل

٢) مجموعة حلول المعادلة $ق = ٠$ هي

الحل (٢١) ١) أوجد معادلة المماس للمنحنى : $ن = \frac{س^{٢}}{١}$ عندما $س = ٣$ ، $س = ٢$

$$\frac{ق\, س}{ق\, ن} = \frac{١}{س^{٢}} \quad \text{عندما} \quad س = ٣ \quad \text{،} \quad ن = ٢$$

٢) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة في المعادلة

المعادلة المماس

$$\Leftarrow ن = -\frac{س}{١} + ل \Rightarrow$$

$$\Leftarrow \frac{٧}{٣} = \Rightarrow \quad ن = -\frac{٣}{١} + ل$$

$$ن = -\frac{٣}{٢} + ل \Rightarrow ل = \frac{٢١}{٢٥}$$

لنجد $ن = ٠$ ، $س = ٣ \Rightarrow$

معادلة المماس المطلوبة

$$ن_{١} = س_{١}^{٢} - ٢س + ٢٥$$

نقطة تقاطع المنحنى مع المحور السينى

$\therefore$ $(0 , 0)$ المطلوبة

نوجد معادلة المماس

$\therefore$ $m = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(x^2 - y^2) + (y^2 + 2x^2) - (x + 3y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x = \frac{1}{3}y^3 - y^2 + 3y + 1$$

$$\Rightarrow \int_1^x (x^2 + 3x - 1)\,dx = \int_1^y (y^2 - 2y + 3)\,dy$$

حل

حل آخر نوجد معادلة المماس بدلالة $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3x - 1}{y^2 - 2y + 3}$$ معكوس x نجد

الحل (٢) نوجد $\frac{dy}{dx}$ ثم نعوض

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2y + 3}{x^2 + 3x - 1}$$

نوجد معادلة المماس بدلالة x ثم نعوض

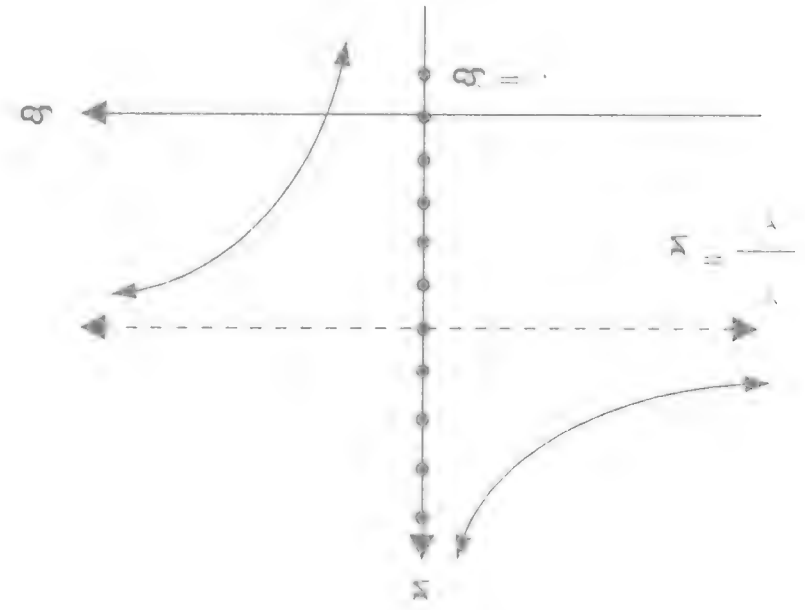
$$\int (x^2 + 3x - 1)\,dx = \int (y^2 - 2y + 3)\,dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x = \frac{1}{3}y^3 - y^2 + 3y + 1$$

نقطة المماس $(0 , 0)$

$\therefore$ معادلة المماس $y = x$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(x^2 - y^2) + (y^2 + 2x^2) - (x + 3y) = 0$$



نجد فترات التقعر

٥) حلها إذا علم أن المنحنى يمر بالنقطة $(0 , \frac{7}{8})$ ومعادلة ميله

x تصاعدة $\forall y > 0$

$\therefore$ x متناقصة $\forall y < 0$

$x = > 0$ إذا $\{y : y < 0\}$

$x = < 0$ إذا $\{y : y > 0\}$

$$x = \frac{y^2}{-1} , y \neq 0$$

بالطرق المختصرة الآتية، فالمقدار الذي بالمقام يحول إلى الصورة ونجد التالي :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \text{جتا ن} \quad ، \quad \frac{\text{د ص}}{\text{د ل}} = \text{جا ن} \quad \text{ومنها} \quad \text{ظ} = \frac{\text{د ل}}{\text{د ص}}$$

$$\text{ظ} (\text{ل}) = \frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} \quad \text{ومنها} \quad \text{ظ} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ل}}$$

$$= \frac{\text{د ل}}{\text{د}^{\text{٢}} \text{ ن}} \quad \text{جتا ن جا ن ، وإذا ، فإن التكامل الخاص بالمقدار المختصر}$$

المقدار (ظا ن + قا ن) يسمى (مقياس) مرجع التكامل الخاص بالمقدار الأصلي ، ونجد أن :

$$\text{ظ} (\text{ل}) = \text{ل}^{\text{٢}} + ٤ \quad \text{الخاص بالمقدار الذي بجانبه} \quad \boxed{\text{المثال (١٥)}}$$

إذن مقياس (مرجع) التكامل الخاص بالمقدار المختصر يحول إلى $\text{ل}^{\text{٢}}$ مقداره

$$\text{ظ} (\text{ل}) = \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} \quad \text{، ومنها} \quad \text{ظ} = \frac{\text{د ن}}{\text{د ل}} = \frac{\text{د ل}}{\text{د ص}}$$

$$= \frac{\text{د ل}}{\text{ل}^{\text{٢}}} \quad \text{جتا ن ، وإذا ، فإن التكامل الخاص بالمقدار المختصر}$$

المقدار (ظا ن + قا ن) يسمى (مقياس) مرجع التكامل الخاص بالمقدار المختصر

المقدار الذي بالمقام يحول إلى ص كما بالمثال السابق :

$$\text{ظ} (\text{ل}) = \text{ل}^{\text{٢}} + ٤ \quad \text{الخاص بالمقدار الذي بجانبه} \quad \boxed{\text{المثال (١٥)}}$$

إذن مقياس (مرجع) التكامل الخاص بالمقدار المختصر يحول إلى $\text{ل}^{\text{٢}}$ مقداره

٤ . ٣ . ٢ طريقة أخرى :

$$\text{ص} = \text{ظ} (\text{ن}) = \text{ن}^{\text{٣}} - \text{ن}^{\text{٢}} - ٣\text{ن} + ٦$$

$$\text{ص} = \int (٣\text{ن}^{\text{٢}} - ٢\text{ن} - ٣) \text{ د ن}$$

$$\text{ص} = ٣\text{ن}^{\text{٣}} - ٢\text{ن}^{\text{٢}} - ٣$$

$$-٢ = ٣ - ٢ + \text{أ} \Rightarrow \text{أ} = -٣$$

$$\Rightarrow \frac{\text{د ن}}{\text{د ص}} = ٣\text{ن}^{\text{٢}} - ٢\text{ن} + \text{أ}$$

$$\int \frac{\text{د ن}}{\text{د}^{\text{٢}} \text{ ص}} \text{ د ن} = \int (٦\text{ن} - ٢) \text{ د ن}$$

المثال

$$\text{ومنها ص} = ٣ \quad \frac{\text{د ن}}{\text{د ل}} = -٢ \text{ ، فإذا ن} = ١ \text{ فإن المقدار الذي بجانبه}$$

$$\boxed{\text{المثال (١٤)}} \quad \text{إذا كان} \quad \frac{\text{د ص}}{\text{د}^{\text{٢}} \text{ ن}} = ٦\text{ن} - ٢$$

ولما سبق فإن $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ن} \div \frac{س}{ن} = \frac{ع}{ن} \div \frac{ن}{ن} = \frac{ع}{ن} \times \frac{ن}{ن} = \frac{ع}{ن}$

وبما أن $ع = ص(ن) = ص(٠) = ٠ = \frac{ع}{ن}$

فإن $ص = \int ع \, ن = \int ٠ \, ن = ن + ثـ$

$ص = ص(٠) = ٠ + ١٥ \Rightarrow ص(٢) = ٢٥$ م/ث

$ع = ص(ن) = ١٥ + ٥٠ ن$

$ف = \int ع \, ن = \int (١٥ + ٥٠ ن) \, ن$

$ف = ٥٠ + ٦ ن^{٢} + ١٥ ن + ٩$ حيث ٩ هي المسافة الأصلية

$\Leftarrow$ $ف = ٩٠ + ٩٠ + ٩ = ١٨٠$

$ع = ٦ ن^{٢} + ١٥ ن$

$ع = ٦ (٩)^{٢} + ١٥ (٩) = ٥٤$

ولما سبق فإن $ع = ص(ن) = ف(ن) = ٠ = \frac{ع}{ن}$

$\frac{ع}{ن} = ٠ \Rightarrow ن = ٠$

$ع = ٦ ن^{٢} + ١٥ ن$

$ع = ٦ (٩)^{٢} + ١٥ (٩) = ٥٤$

$ف = \int ع \, ن = \int (٦ ن^{٢} + ١٥ ن) \, ن$

$ف = ٢ ن^{٣} + \frac{١٥}{٢} ن^{٢} + ثـ$

$ف = ٩ \Rightarrow ٩ = ٢ (٩)^{٣} + \frac{١٥}{٢} (٩)^{٢} + ثـ$

$\Leftarrow$ $ثـ = ٩ - ١٤٥٨ = -١٤٤٩$

$ف = ٢ ن^{٣} + \frac{١٥}{٢} ن^{٢} - ١٤٤٩$

$ف = ٢ (١٠)^{٣} + \frac{١٥}{٢} (١٠)^{٢} - ١٤٤٩ = ٥١$ م

$ع = ٦ ن^{٢} + ١٥ ن$

$ع = ٦ (١٠)^{٢} + ١٥ (١٠) = ٧٥٠$ م/ث

(١) إذا كان $ف$ هي المسافة بالأمتار بعد $ن$ ثانية من بدء الحركة فإن $ف = ٢ ن^{٣} + ٣ ن^{٢} + ٤ ن$

(٢) إذا كان $ع$ هي السرعة بالأمتار لكل ثانية بعد $ن$ ثانية من بدء الحركة فإن $ع = ٦ ن^{٢} + ٦ ن$

(٣) إذا كان $ع$ هي السرعة بالأمتار لكل ثانية بعد $ن$ ثانية من بدء الحركة فإن $ع = ٣ ن^{٢} + ٤ ن$

مثال المعادلة $ع = ف(ن) = ٢ ن^{٣} + ٤ ن$ تمثل العلاقة بين المسافة المقطوعة بالأمتار والزمن بالثواني لجسم يتحرك في خط مستقيم.

(١) أوجد سرعة الجسم بعد ٣ ثوان.

(٢) أوجد سرعة الجسم عندما تكون المسافة المقطوعة ٢٠ م.

(٣) أوجد المسافة المقطوعة بعد ٥ ثوان.

(٤) أوجد المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة.

(٥) أوجد سرعة الجسم عندما تكون المسافة المقطوعة ٢٠ م.

الحل

(١) $ع = ٦ ن^{٢} + ٤ ن$

$ع = ٦ (٣)^{٢} + ٤ (٣) = ٦٦$ م/ث

(٢) $ف = ٢ ن^{٣} + ٤ ن$

$٢٠ = ٢ ن^{٣} + ٤ ن$

$٢ ن^{٣} + ٤ ن - ٢٠ = ٠$

$ن^{٣} + ٢ ن - ١٠ = ٠$

$(ن - ٢)(ن^{٢} + ٢ ن + ٥) = ٠$

$ن = ٢$ ثانية

$ع = ٦ (٢)^{٢} + ٤ (٢) = ٣٢$ م/ث

(٣) $ف = ٢ ن^{٣} + ٤ ن$

$ف = ٢ (٥)^{٣} + ٤ (٥) = ٢٧٠$ م

(٤) المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة $= ف(٥) - ف(٤)$

$= ٢٧٠ - ٢٠٠ = ٧٠$ م

(٥) $ع = ٦ ن^{٢} + ٤ ن$

$ع = ٦ (٢)^{٢} + ٤ (٢) = ٣٢$ م/ث

٢٠٤ تمرين :

جـ١ : إذا كان ص = ٨ √(س٣ + ١) فبرهن أن ص ص ، = ٢ س٣ جتا٢ س

ب : ص = ٣ جتا٢ س − ٢ جتا٦ س

جـ٢ : إذا كان ص = ٢ س٣ − ٣ س٢ + ٤ فبرهن أن ص ص ، = ٦ س٢ − ٦ س

جـ٣ : إذا كان ص = ٣ س٢ − ٢ س + ٥ فبرهن أن ص ص ، = ٦ س − ٢

جـ٤ : إذا كان ص = ٢ س٣ − ٣ س٢ − ١٢ س + ٧ فبرهن أن ص ص ، = ٦ س٢ − ٦ س − ١٢

جـ٥ : إذا كان ص = ٢ / (س − ٢) فبرهن أن ص ص ، = − ٢ / (س − ٢)٢

جـ٦ : إذا كان ص = ٢ / (س − ٢)٢ فبرهن أن ص ص ، = − ٦ / (س − ٢)٣

جـ٧ : إذا كان ص = ٢ / (س − ٢)٣ فبرهن أن ص ص ، = − ١٢ / (س − ٢)٤

جـ٨ : إذا كان ص = ٢ / (س − ٢)ن فبرهن أن ص ص ، = − ن ٢ / (س − ٢)ن + ١

جـ٩ : إذا كان ص = ٢ / (س − ٢)٤ فبرهن أن ص ص ، = − ٢٤ / (س − ٢)٥

جـ١٠ : إذا كان ص = ٢ / (س − ٢)٥ فبرهن أن ص ص ، = − ٦٠ / (س − ٢)٦

جـ١١ : إذا كان ص = ٢ / (س − ٢)ن فبرهن أن ص ص ، = − ن ٢ / (س − ٢)ن + ١

جـ١٢ : إذا كان ص = ٢ / (س − ٢)ن فبرهن أن ص ص ، = − ن ٢ / (س − ٢)ن + ١

جـ١٣ : إذا كان ص = ٢ / (س − ٢)ن فبرهن أن ص ص ، = − ن ٢ / (س − ٢)ن + ١

فيما يلي سنذكر دون برهان نتيجة هامة :

$$\int_{أ}^{ب} د (س)\, دس = [\, م (س)\,]_{أ}^{ب} = م (ب) - م (أ)$$

حيث م دالة أصلية للدالة د على [أ ، ب]

مثال (١)

أوجد $\int_{0}^{1} (س^{2} + 1)\, دس$

الحل

$$= [\, \frac{س^{3}}{3} + س\,]_{0}^{1} = (\frac{1}{3} + 1) - (0 + 0) = \frac{4}{3}$$

مثال (٢)

أوجد $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جتا\, س\, دس$

الحل

$$= [\, جا\, س\,]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = جا \frac{\pi}{2} - جا\, 0 = 1 - 0 = 1$$

مثال (٣)

أوجد $\int_{0}^{1} \frac{1}{س + 1}\, دس$

الحل

$$= [\, لو_{هـ} (س + 1)\,]_{0}^{1} = لو_{هـ} 2 - لو_{هـ} 1 = لو_{هـ} 2$$

مثال (٤)

أوجد $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} جا^{2} س\, دس$

الحل

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - جتا\, 2س}{2}\, دس = [\, \frac{1}{2} س - \frac{1}{4} جا\, 2س\,]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

مثال (٥)

أوجد $\int_{0}^{1} \frac{س^{2}}{س^{3} + 1}\, دس$

الحل

$$= \frac{1}{3} [\, لو_{هـ} (س^{3} + 1)\,]_{0}^{1} = \frac{1}{3} لو_{هـ} 2$$

مثال (٦)

أوجد $\int_{0}^{1} \frac{س}{س^{2} + 1}\, دس$

الحل

$$= \frac{1}{2} [\, لو_{هـ} (س^{2} + 1)\,]_{0}^{1} = \frac{1}{2} لو_{هـ} 2$$

مثال (٧)

أوجد $\int_{0}^{1} \frac{1}{س^{2} + 1}\, دس$

الحل

$$= [\, ظا^{-1} س\,]_{0}^{1} = ظا^{-1} 1 - ظا^{-1} 0 = \frac{\pi}{4}$$

مثال (٨)

أوجد $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{4 - س^{2}}}\, دس$

الحل

$$= [\, جا^{-1} \frac{س}{2}\,]_{0}^{1} = جا^{-1} \frac{1}{2} - جا^{-1} 0 = \frac{\pi}{6}$$

مثال (٩)

أوجد $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - س^{2}}}\, دس$

الحل

$$= [\, جا^{-1} س\,]_{0}^{1} = جا^{-1} 1 - جا^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$$

مثال (١٠)

أوجد $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{س^{2} + 1}}\, دس$

الحل

$$= [\, لو_{هـ} (س + \sqrt{س^{2} + 1})\,]_{0}^{1} = لو_{هـ} (1 + \sqrt{2}) - لو_{هـ} 1 = لو_{هـ} (1 + \sqrt{2})$$

٤ - ٤ الحدودية المميزة

ليكن $ك : س_{٢} = ٤ ص$

المطلوب إيجاد تكامل الدالة (١ ، ٢)

ك : $ص_{٢} + س_{٢} = ٢$

ت $\subset$ ح : ل = {(ص ، س) ∈ ك : ص = $\frac{٢}{٣}$ ، ٢ ، ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}

ك : $ص_{٢} = ٤ ص$

المطلوب إيجاد تكامل الدالة (١ ، ٢)

ت $\subset$ ح : ل = {(ص ، س) ∈ ك : ص = $\frac{٢}{٣}$ ، ٢ ، ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}

٤ - ٤ الحدودية المميزة

تعريف $\int_{أ}^{ب} د (س)\, دس = د (ص) + ل$ ..... (١)

حيث د دالة أصلية للدالة د على ح ، ل ∈ ح

وتسمى الدالة د (ص) + ل الحدودية المميزة للدالة د على ح

ويسمى الثابت ل ثابت التكامل

ويسمى المقدار $\int_{أ}^{ب} د (س)\, دس$ التكامل المحدود للدالة د على [أ ، ب]

ويسمى العددان أ ، ب حدي التكامل

$$\int_{أ}^{ب} د (س)\, دس = \{ د : د (س) = م (س) + ل ، ل ∈ ح \}$$ حيث م دالة أصلية لـ د على [أ ، ب]

$$= [\, م (س)\,]_{أ}^{ب} = م (ب) - م (أ)$$

$$\int_{-1}^{1} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} (-x)\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[0^2 - (-1)^2\right] + \frac{1}{2}\left[1^2 - 0^2\right] = \frac{1}{2}$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\pi - \frac{1}{2}\sin 2\pi\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\pi - 0\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{1}^{3} x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{1}^{3}$$

$$= \frac{1}{3}(3)^3 - \frac{1}{3}(1)^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

$$\int_{0}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} (x^2+9)^{-\frac{1}{2}}(2x)\,dx$$

$$= \left[\sqrt{x^2+9}\right]_{0}^{2}$$

$$= \sqrt{13} - \sqrt{9} = 13 - 9 = 4$$

نظرية (١٧) يمكن تعميمها على حل على الصورة :

إذا كان f **دالة متصلة على الفترة** $[a,b]$ **وكانت** g **دالة قابلة للاشتقاق على** $[a,b]$ **بحيث** $g(a)=c$ **، و** $g(b)=d$ **فإن**

$$\int_{c}^{d} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(g(x))\,g'(x)\,dx$$

حيث F دالة أصلية لـ f على $[a,b]$. ومنها

$$f(x) = F(x) \Rightarrow \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{a}^{b}$$

$$= F(b) - F(a)$$

حيث $x=a$ **، قيمة متغير تكامل** f **هي قيمة بدائية**

$x=b$ **قيمة متغير تكامل** f **هي قيمة بدائية**

خواص تكاملات محددة

$$\int_{ا}^{ب} د(س)\,هـ س = -\int_{ب}^{ا} د(س)\,هـ س \quad (١)$$

$$\int_{ا}^{ب} ك\,د(س)\,هـ س = ك\int_{ا}^{ب} د(س)\,هـ س \quad (٢)$$

$$\int_{ا}^{ب} [\,د(س) \mp ر(س)\,]\,هـ س = \int_{ا}^{ب} د(س)\cdot هـ س \mp \int_{ا}^{ب} ر(س)\cdot هـ س \quad (٣)$$

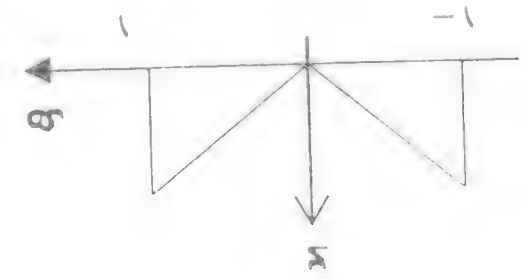
ويمكن عكس الخاصية على كل حدود هذه المتكاملة إذا وقع ج بين ا ، ب

لكن ما الحدود بحيث يكون هذا صحيحا مهما كان ج ؟ إذا كان ج أحد حدود التكامل فإن

$$\int_{ا}^{ب} د(س)\,هـ س = \int_{ا}^{ج} د(س)\,هـ س + \int_{ج}^{ب} د(س)\,هـ س \quad (٤)$$

حيث ج $\in [\,ا\,،\,ب\,]$ ويمكن عكس الخاصية على كل حدود هذه المتكاملة إلى أي مدى ، ج ، ر ،

..... $\in [\,ا\,،\,ب\,]$



إشارة (٤ ـ ٥)

$$= \frac{٨}{١} + \frac{٨}{١} = ١$$

$$= [\,٠ - (-\frac{٨}{١})\,] + [\,\frac{٨}{١} - ٠\,]$$

$$= [\,\frac{٨}{-٨}\,]_{١-} + [\,\frac{٨}{٨}\,]_{٠}$$

$$= \text{جا} \frac{\pi}{٢} = ١ \times ٢ = ٢$$

$$= [\text{جتا } \theta]_{\frac{-\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} = [\text{جتا } \frac{\pi}{٢} - \text{جتا } (-\frac{\pi}{٢})] = \text{جتا } \frac{\pi}{٢} + \text{جتا } \frac{\pi}{٢}$$

ج) $\int_{-\pi/٢}^{\pi/٢} \text{جتا } \theta \, d\theta$

$$= [\text{ظا } \theta]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} + [\text{ظا } \theta]_{٠}^{١-}$$

$$= [\text{ظا } \frac{\pi}{٤} - \text{ظا } ٠] + [\text{ظا } ١- - \text{ظا } ٠]$$

$$= [-\text{جتا } \frac{\pi}{٢}] - [-\text{جتا } ٠] = [\frac{\pi}{٢} - \text{جتا } ٠]$$

د) $\int_{-\pi/٢}^{\pi/٢} \text{جا } \theta \, d\theta = [-\text{جتا } \theta]_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}}$

$$= \frac{٤}{١} + \frac{٤}{١} = \text{ظا } \frac{\pi}{٤}$$

$$= [\frac{٤}{\text{ظ}_{١}}]_{٠}^{١-} + [\frac{٤}{\text{ظ}_{٢}}]_{٠}^{١}$$

هـ) $\int_{-١}^{١} \text{ظ}_{٢} \, d\text{ظ} = \int_{-١}^{٠} \text{ظ}_{٢} \, d\text{ظ} + \int_{٠}^{١} \text{ظ}_{٢} \, d\text{ظ}$

$$= \frac{٣}{١} + \frac{٣}{١} = \frac{٣}{٢}$$

$$= [٠ - (-\frac{٣}{١})] + [\frac{٣}{١} - ٠]$$

و) $\int_{-١}^{١} \text{ظ}_{١} \, d\text{ظ} = \int_{-١}^{٠} \text{ظ}_{١} \, d\text{ظ} + \int_{٠}^{١} \text{ظ}_{١} \, d\text{ظ} = [\frac{\text{ظ}_{٢}}{٢}]_{-١}^{٠} + [\frac{\text{ظ}_{٢}}{٢}]_{٠}^{١}$

مثال (١٨) إذا كان $\text{ظ}(\theta) = \begin{cases} \text{جا } \theta & ، \theta \geq ٠ \\ \text{جتا } \theta & ، \theta < ٠ \end{cases}$ فجد $\int_{-\pi/٢}^{\pi/٢} \text{ظ}(\theta) \, d\theta$

۳ـ٤ تمرينات

أوجد التكاملات الآتية كما هو مبين :

(١) $\int_{1}^{2} x^{2}\,dx$

(٢) $\int_{0}^{1} \frac{x^{2}}{x^{3}-8}\,dx$

(٣) $\int_{1}^{3} x\sqrt{x+1}\,dx$

(٤) $\int_{0}^{1} \frac{x^{2}}{\sqrt{1+x}}\,dx$

(٥) $\int_{-2}^{1} (x^{2}+3)(x-2)\,dx$

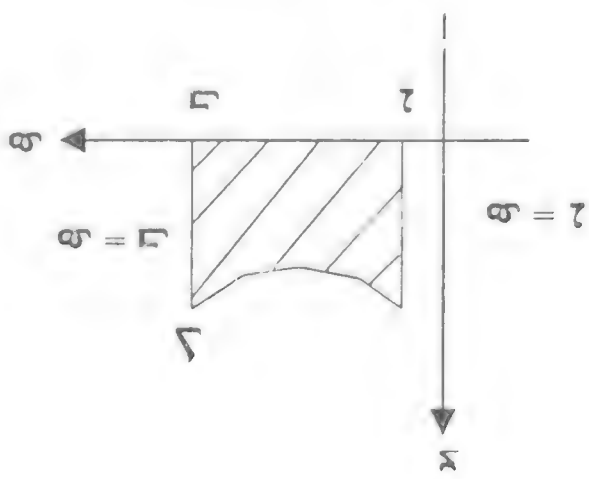
(٦) $\int_{0}^{1} \frac{x^{2}}{\sqrt{x^{3}+1}}\,dx$

(٧) $\int_{0}^{3} x\sqrt{x+1}\,dx$

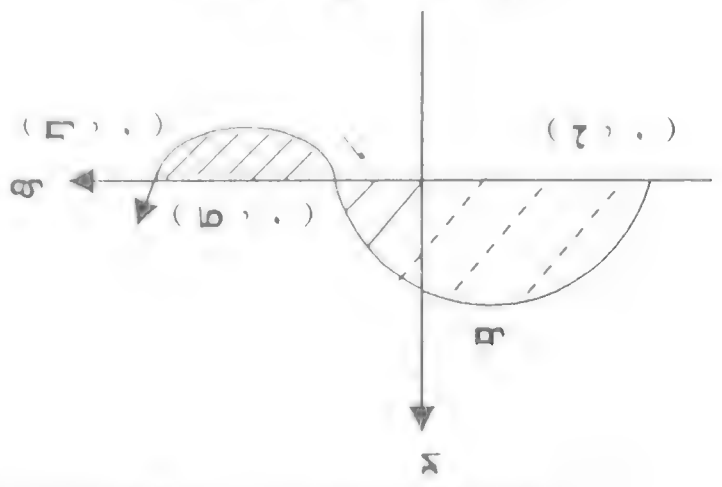
(٨) $\int_{0}^{1} \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)\,dx$

(٩) $\int_{0}^{1} \sqrt{x^{2}+2x+1}\,dx$

(١٠) $\int_{0}^{1} \frac{x^{2}}{(x+1)^{2}}\,dx$



إذا كان : (٦ ـ ٤)



إذا كان : (٧ ـ ٤)

٤ ـ ٦ تمارين محلولة

(١) $\int_{0}^{\pi/2} \sin^{2}\theta \cos^{3}\theta \, d\theta$

(٢) $\int_{\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2}\theta \cos^{4}\theta \, d\theta$

(٣) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^{2}\theta \cos^{4}\theta) \, d\theta$

أوجد مما يلي : $\int_{0}^{\infty} \frac{d\omega}{(1+\omega^{2})^{3}}$ ، $\int_{0}^{\infty} \frac{d\omega}{(1+\omega^{2})^{2}} = \frac{\pi}{4}$ (٤)

(٥) $\int_{0}^{\infty} \frac{x^{2}\,dx}{(1+x^{2})^{3}} = \frac{\pi}{32}$ (٦) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^{2})^{3}}$

مثال (١٩)

أوجد متوسط التغير للدالة د(س) = س^{٣} + ٢س^{٢} + ٣ في الفترة [١ ، ٢] .

الحل

متوسط التغير = $\frac{\text{د}(٢) - \text{د}(١)}{٢ - ١}$

د(٢) = ٢^{٣} + ٢ × ٢^{٢} + ٣ = ٢٣

د(١) = ١^{٣} + ٢ × ١^{٢} + ٣ = ٦

∴ متوسط التغير = $\frac{٢٣ - ٦}{١}$ = ١٧

مثال (٢٠)

أوجد متوسط التغير للدالة د(س) = ٢س^{٣} + ٥ في الفترة [٠ ، ٢] .

الحل

د(٠) = ٥ ، د(٢) = ٢ × ٢^{٣} + ٥ = ٢١

∴ متوسط التغير = $\frac{٢١ - ٥}{٢}$ = ٨

مثال (٢١)

أوجد متوسط التغير للدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ في الفترة [١ ، ٢] .

الحل

متوسط التغير = $\frac{\text{د}(٢) - \text{د}(١)}{٢ - ١}$

د(٢) = $\frac{١}{٢}$ ، د(١) = ١

∴ متوسط التغير = $\frac{\frac{١}{٢} - ١}{١}$ = $-\frac{١}{٢}$

تمرين

أوجد متوسط التغير للدالة د(س) = س^{٢} + ٢س + ٣ في الفترة [٠ ، ٢] .

الحل

د(٠) = ٣ ، د(٢) = ٢^{٢} + ٢ × ٢ + ٣ = ١١

∴ متوسط التغير = $\frac{١١ - ٣}{٢}$ = ٤

مثال (٢٢)

أوجد متوسط التغير للدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ في الفترة [١ ، ٢] .

الحل

متوسط التغير = $\frac{\text{د}(٢) - \text{د}(١)}{٢ - ١}$

د(٢) = $\frac{١}{٢}$ ، د(١) = ١

∴ متوسط التغير = $\frac{\frac{١}{٢} - ١}{١}$ = $-\frac{١}{٢}$

$$\text{ص} (\text{ص}-٢) (\text{ص} + ٢) = ٠ \implies$$

$$\text{ع} = ٠ \implies \text{ص}^{٣} - ٤\text{ص} = ٠ \iff$$

(أ) تميز بأن مساحة بعد فترة معينة (مثل سنة)

مثلث عدد المحاصيل حلل فضاء $[\,-٢\,,\,٢\,]$

حل أوجد القيم العظمى المحلية $\text{ص}=٢$ ، $\text{ص}=-٢$

الحل (٢٠) ليكن ساحة الشكل الذي يحصر بين المنحنى

القيم العظمى المحلية $\text{ص} = ٢$ عند $\text{ع} = \text{ق}(\text{ص}) = \text{ص}^{٣} - ٤\text{ص}$

$$= \left| \frac{٤}{١} \right| + \left| -\frac{٤}{١} \right| = \frac{٤}{١} + \frac{٤}{١} = \frac{٨}{١} \text{ وحدة مساحة}$$

$$= \left| \left(\frac{٤}{١} - ١ + ١ \right) - (٤ + ٨ - ٤) \right| + \left| ٠ - (١ + ١ - \frac{٤}{١}) \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{٤}{\text{ص}_{٤}} - \text{ص}_{٣} + \text{ص}_{٢} \right]_{١}^{٢} \right| + \left| \left[\frac{٤}{\text{ص}_{٤}} - \text{ص}_{٣} + \text{ص}_{٢} \right]_{٠}^{١} \right| =$$

$$+ \left| \int_{١}^{٢} (\text{ص}_{٣} - ٣\text{ص}_{٢} + ٢\text{ص}) \, \text{د}\text{ص} \right|$$

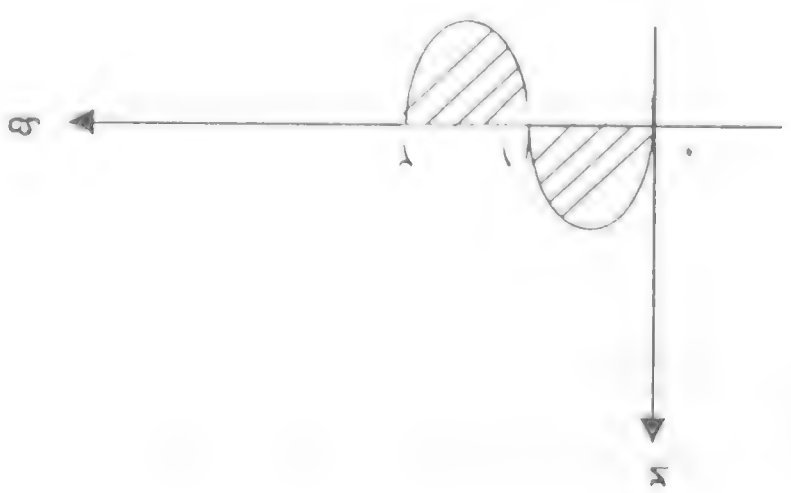
$$\text{المساحة} = \text{أ} = \left| \int (\text{ص}_{٣} - ٣\text{ص}_{٢} + ٢\text{ص}) \, \text{د}\text{ص} \right|$$

$$\text{أي: } \text{ص} = ١ \implies$$

$$\iff \text{ص} (\text{ص} - ٢) (\text{ص} - ١) = ٠ \implies \text{ص} = ٠ \text{ أو } \text{ص} = ٢$$

$$(\text{ص}_{٣} - ٣\text{ص}_{٢} + ٢\text{ص} = ٠) \iff \text{ص} (\text{ص}_{٢} - ٣\text{ص} + ٢) = ٠$$

الشكل (٤ - ٨)



$$+\left|\int_{1}^{2}(x^3-6x^2+5)\,dx\right|$$

$$\text{المساحة} = A = \left|\int_{0}^{1}(x^3-6x^2+5)\,dx\right| \quad (2)$$

$$\text{لماذا؟} \quad 0 \in (1,2)$$

$$x = \pm\sqrt{0}, x = \pm 1 \notin [1,2], -\sqrt{0} \notin (2,3)$$

$$(x-5)(x^2-1) = 0$$

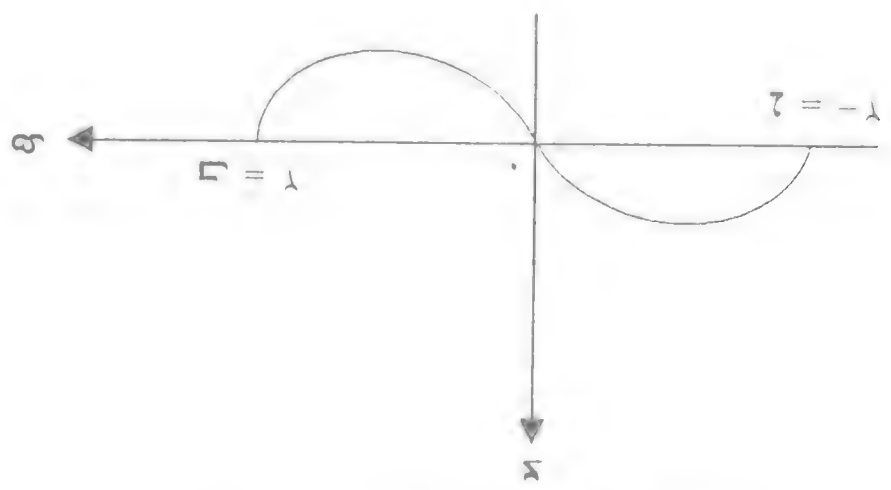
(1) المساحة لا تقع فوق المحور السينى $\Rightarrow y = 0$

الحل $y = \dot{c}(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

$y = \dot{c}(x)$ موضح فى الجدول المقابل حيث $x \in [1,3]$

مثال (1) أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى

$$\text{المطلوب} \quad (4.9)$$



$$= |3| + |-3| = 3 + 3 = 6 \text{ وحدة مساحة}$$

$$= |(0) - (3-6)| + |(3-6) - 0|$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{3}\right|$$

$$\text{المساحة} = A = \left|\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{3}(x^3-4x)\,dx\right|$$

$$0 \in \{-2, 2\}, 2 \in \{-2, 2\} \in [-2, 3] \quad -2 \Rightarrow x = 2, x = -2$$

إذا تساوى قياسا زاويتين في مثلث كان المثلث متساوي الساقين.

$$\text{ق}(\angle ١) = \text{ق}(\angle ٢) \Rightarrow \text{ق} = ٠ \text{ أو } \text{ق} = ١ \text{ أو } \text{ق} = -١$$

$$\text{ق}(١ - \text{ق}^{٢}) = ٠ \Rightarrow \text{ق} = ٠ \text{ أو } \text{ق}^{٢} = ١$$

$$\text{ق} - \text{ق}^{٣} = ٠ \Leftrightarrow$$

$$\text{ق}^{٣} - \text{ق} = ٠ \Rightarrow$$

فإن $\text{ق} = ١$ أو $\text{ق} = -١$ أو $\text{ق} = ٠$ ، حيث يمثل المحور السيني نقاط التقاطع

$$\text{ل}(\text{ق}) = \text{ع}(\text{ق}) - \text{و}(\text{ق}) \Leftrightarrow \text{ل}(\text{ق}) = \text{ق} - \text{ق}^{٣} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

مثال (١) فيما إذا مثلت الدالتان ع، و حيث

$$\text{ع}(\text{ق}) = \text{ق} \ ، \ \text{و}(\text{ق}) = \text{ق}^{٣}$$

ملاحظة (٢٢) لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالتين متصلتين ع، و على الفترة $[\text{ا} ، \text{ب}]$ حيث $\text{ع}(\text{ق}) \geq \text{و}(\text{ق})$ لكل $\text{ق} \in [\text{ا} ، \text{ب}]$ فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالتين ع، و والمستقيمين $\text{ق} = \text{ا}$ ، $\text{ق} = \text{ب}$ تعطى بالعلاقة :

$$\text{مساحة} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} | \text{ع}(\text{ق}) - \text{و}(\text{ق}) | \, \text{د}\text{ق}$$

مثال ٧ ، ٤ إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين

مثل بيانيا الدالة ع(ق) فيما إذا كان $\text{ق} \in [\text{ا} ، \text{ب}]$

مثل بيانيا الدالة و(ق) فيما إذا كان $\text{ق} \in [\text{ا} ، \text{ب}]$

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالتين ع، و

الحل

$$\text{ق} = \text{ا} \ ، \ \text{ق} = \text{ب} \text{ حيث :}$$

$$\text{مساحة} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} | \text{ع}(\text{ق}) - \text{و}(\text{ق}) | \, \text{د}\text{ق}$$

$$= \left| \left[\frac{\text{ق}^{٣}}{٣} - ٢\text{ق}^{٢} + ٥\text{ق} \right]_{١}^{٢} \right| + \left| \left[\frac{\text{ق}^{٣}}{٣} - ٢\text{ق}^{٢} + ٥\text{ق} \right]_{٢}^{٥} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{٢٢}{٣} - ٢١ + ١٠ \right) - \left(\frac{٥}{٣} - ٥ + ٥\sqrt{٥} \right) \right| + \left| \left(\frac{٥}{٣} - ٥ + ٥\sqrt{٥} \right) - \left(\frac{٢٤٣}{٣} - ١٥ + ٥٤ \right) \right|$$

$$= \left| -\frac{٥}{٢} \right| + \left| \frac{٥}{٤٨} \right| = \frac{٥}{٢} + \frac{٥}{٤٨} = ٠,١ \text{ وحدة مربعة}$$

$\Rightarrow$ نجد مساحة المنطقة المطلوبة $= ق(س) - ل(س)$

حيث حدود هذه المساحة هي حدود التكامل

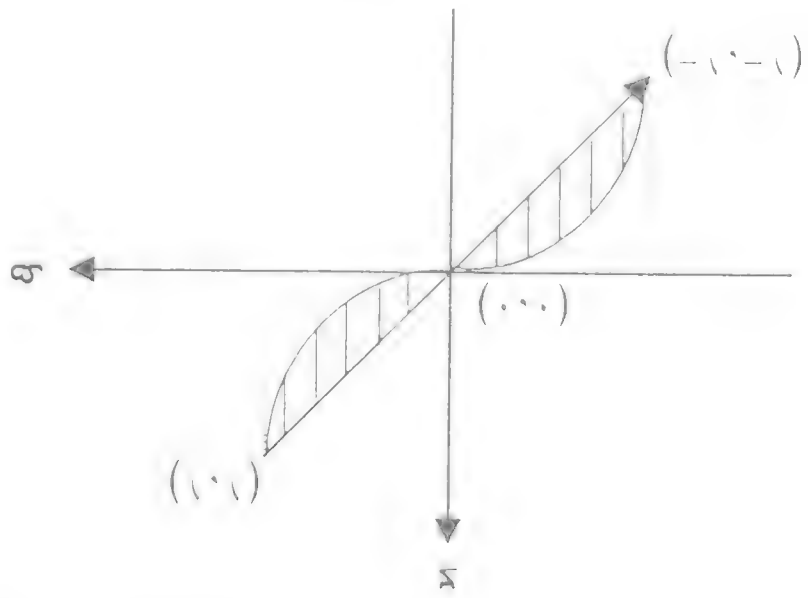
نجد أن المطلوب أولاً هو إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $[-١، ١]$

مثال

حساب مساحة المنطقة المحصورة بين $ص = ل(س) = \sqrt[٣]{س}$ على الفترة $[-١، ١]$ ثم إيجاد مساحة

ملاحظة (٢٣) إذا كان $ص = ق(س) = س$ على الفترة $[-١، ١]$

المنطقة $(٤ . ٠ . ١)$



$$= \frac{١}{٢} \times ٢ \times ١ + \frac{١}{٢} \times ٢ \times ١$$

$$= \left| \frac{٤}{-١} \right| + \left| \frac{٤}{١} \right| = \frac{٤}{١} + \frac{٤}{١}$$

$$= \left| \left[\frac{٣}{٤} - \frac{٣}{٢} \right]_{-١}^{٠} \right| + \left| \left[\frac{٣}{٤} - \frac{٣}{٢} \right]_{٠}^{١} \right|$$

$$\text{مساحة} = \left| \int_{-١}^{٠} (س - س_١)^٣ \, د س \right| + \left| \int_{٠}^{١} (س - س_٢)^٣ \, د س \right|$$

$\Leftrightarrow س (س - ١)(س + ١) = ٠ \Rightarrow$ النقط $(٠، ٠)، (١، ١)، (-١، -١)$ تقع على المنحنى

$$\left.\begin{array}{l} ص = س \\ ص = س \end{array}\right\} \Rightarrow س_٣ = س \Leftrightarrow س_٣ - س = ٠$$

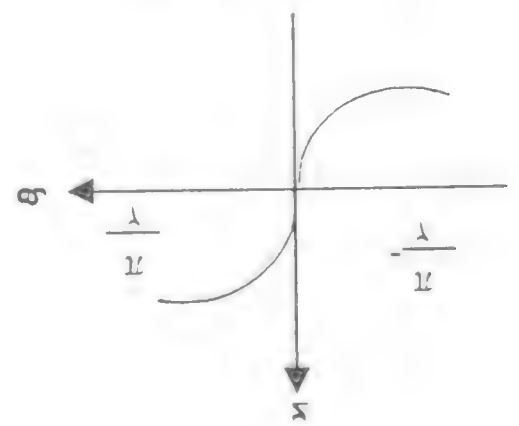


$$= |-١ + \text{جتا}\frac{\pi}{٢}(\frac{\pi}{٢}) | + | - \text{جتا}\frac{\pi}{٢} + \text{جتا}\ ٠ | =$$

$$= | - \text{جتا}\ ٠ - (-\text{جتا}\frac{\pi}{٢}) | + | - \text{جتا}\frac{\pi}{٢} - (-\text{جتا}\ ٠) | =$$

$$= | [-\text{جتا}\ هـ] \Big|_{-\frac{\pi}{٢}}^{٠} | + | [-\text{جتا}\ هـ] \Big|_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} | =$$

$$= |\int_{-\pi/٢}^{٠} \text{جتا}\ هـ\ د هـ| + |\int_{٠}^{\pi/٢} \text{جتا}\ هـ\ د هـ|$$ (٢) مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين



$هـ = ٠ \in [\frac{-\pi}{٢}, \frac{\pi}{٢}]$

مثال (١) مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $ص = \text{جتا}\ هـ$ ، $ص = ٠$ حيث $هـ \in [\frac{-\pi}{٢}, \frac{\pi}{٢}]$

الحل

$ق(هـ) = \text{جتا}\ هـ$ ، $ن(هـ) = ٠$ على الفترة $[\frac{-\pi}{٢}, \frac{\pi}{٢}]$

نوجد نقاط التقاطع

$\Rightarrow هـ = \frac{-\pi}{٢}$ ، $هـ = \frac{\pi}{٢}$

ملحوظة (٢٥) لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين دالتين فإنه

= التكامل المحدد على الفترة $[\frac{-\pi}{٢}, \frac{\pi}{٢}]$ للدالة $ق(هـ) - ن(هـ)$ حيث $ق(هـ) = \text{جتا}\ هـ$ على الفترة $[\frac{-\pi}{٢}, \frac{\pi}{٢}]$

مثال (١) مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $ص = \text{جا}\ هـ$ ، $ص = ٠$ حيث $هـ \in [٠, \pi]$

الحل

$ق(هـ) = \text{جا}\ هـ$ ، $ن(هـ) = ٠$ على الفترة $[٠, \pi]$

نوجد نقاط التقاطع

$\Rightarrow هـ = ٠ \in [٠, \pi]$

ملحوظة (٢٤) لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $ص = ق(هـ)$ والمحور السيني فإنه

= التكامل المحدد على الفترة $[\frac{-\pi}{٢}, \frac{\pi}{٢}]$ للدالة $|ق(هـ)|$ حيث $ق(هـ) = \text{جتا}\ هـ$ على الفترة $[\frac{-\pi}{٢}, \frac{\pi}{٢}]$

ملحوظة (٢٣) لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $ص = ق(هـ)$ والمحور السيني فإنه

نجد أصفار الدالة $ق$ في الفترة المعطاة ثم نجد التكامل المحدد للدالة $|ق(هـ)|$ على الفترة المعطاة

مثال (١) مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $ص = \text{جا}\ هـ$ والمحور السيني حيث $هـ \in [٠, \pi]$

الحل

$ق(هـ) = \text{جا}\ هـ$ على الفترة $[٠, \pi]$

نوجد أصفار الدالة $ق$

$\Rightarrow هـ = ٠ \in [٠, \pi]$ ، $١ \in [٠, \pi]$ ، $-١ \notin [٠, \pi]$

$هـ(هـ - ١)(هـ + ١) = ٠$ بالقسمة

$ل(هـ) = \Rightarrow هـ - \sqrt[٣]{هـ} = ٠ \Leftrightarrow هـ = \sqrt[٣]{هـ} \Rightarrow هـ^{٣} - هـ = ٠ \Rightarrow$

$ل(هـ) = هـ - \sqrt[٣]{هـ}$ على $[-١, ١]$

$$\left|\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\sin x-\cos x)\,dx\right|+\left|\int_{\pi/2}^{3\pi/4}(\sin x-\cos x)\,dx\right|=\text{المساحة}\quad(3)$$

$$=\left|\left[\cos x+\sin x\right]_{\pi/4}^{\pi/2}\right|+\left|\left[\cos x+\sin x\right]_{\pi/2}^{3\pi/4}\right|=$$

$$=\left|\left(-\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\right)-\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)\right|+\left|\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}\right)-\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)\right|=$$

$$=\left|\left(-\frac{\pi}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|+\left|\left(-1\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|=$$

$$=\left|1-\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right|+\left|-1-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1+\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}\ \text{وحدة مربعة}$$

السؤال الثاني: (أ) إذا كان $f(x)=\sin x-\cos x$ ، $g(x)=f(x)-f'(x)$ فجد مساحة المنطقة المحصورة بين $g(x)$ ومحور السينات على الفترة $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ (٦ علامات)

(ب) أثبت أن $f(x)=\sin x\cos x$ دالة فردية على $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ثم جد متوسط قيمة f على الفترة نفسها. (٦ علامات)

$$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\in x\quad\text{لكل}\quad f(-x)=\sin(-x)\cos(-x)=-\sin x\cos x=-f(x)$$

$$\text{متوسط القيمة}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin^2 x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\left|\int_{\pi/2}^{\pi}\sin x\cos x\,dx\right|=\text{المساحة}\quad(3)$$

$$=\left|\left[\frac{1}{2}\sin^2 x\right]_{\pi/2}^{\pi}\right|=\left|0-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\ \text{وحدة مربعة}$$

$$\frac{\pi}{2}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\ \text{لأن}$$

$$= \left| \left[\frac{-1}{2} \cos 2x + \cos x \right]_{\pi/2}^{\pi} \right| + \left| \left[\frac{1}{2} \cos 2x + \cos x \right]_{\pi/2}^{\pi/2} \right| =$$

$$= \left| \int_{\pi/2}^{\pi} (\cos x - \cos^2 x) \, dx \right| + \left| \int_{\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 x - \cos x) \, dx \right| = 2 \frac{1}{2} \text{ وحدة مربعة} \quad (٣$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{2}{1} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = 0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\Leftrightarrow \cos x (2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$h(x) = \cos 2x - \cos x = 0 \Rightarrow$$

ايجاد مجموعة حل المعادلة حيث $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ثم ايجاد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين

مثال $h(x) = g(x) - f(x) = \cos 2x - \cos x$

ملاحظة (٢٧) المنحنى الذي معادلته $g(x) = \cos 2x$ على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

يقع فوق المنحنى الذي معادلته $f(x) = \cos x$ على الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

$= 2\sqrt{2}$ وحدة مربعة

$$= \frac{2\sqrt{2}}{4} = 1 - \frac{2}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \left| \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \right| + \left| (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - (0 + 1) \right| + \left| (0 - (-1)) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right| =$$

$$+ \left| \left(\cos \frac{-\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right) - \left(\cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right|$$

$$\text{مساحة} = \int_{1}^{2} |\, m(x) \,|\, dx$$

حيث $m(x)$ دالة معرفة على فترة مغلقة $[1, 2]$ فإن :

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين

$$= \frac{8}{3} \text{ وحدة مربعة}$$

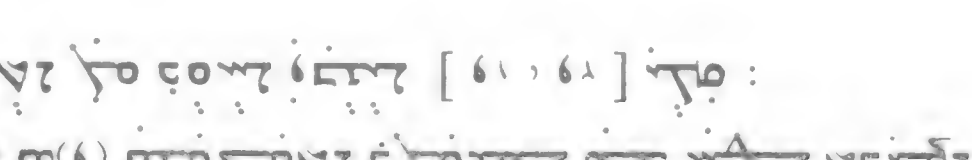
$$= \left| \frac{3}{1} \right| + \left| -\frac{3}{1} \right| = \frac{3}{1} + \frac{3}{1}$$

$$= \left| \left(\frac{3}{1} + \frac{2}{1} \right) - \left(-\frac{2}{1} + 1 \right) \right| + \left| \left(\frac{2}{1} + 0 \right) - \left(\frac{3}{1} + \frac{2}{1} \right) \right|$$

حيث x هي فواصل نقاط تقاطع المنحنيين.

$$\text{المساحة} = \int_{-2}^{1} |\, m(x) \,|\, dx$$

المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $m(x) = x^2 - 3$ ومحور السينات على الفترة $[-2, 1]$:



مثال (٢٨)

٤ - ٨ المساحة

1. المساحة المحددة بالمنحنى $y = x^2 - 3$ والمستقيم $y = 2x$ في الفترة $[-1, 3]$
2. المساحة المحددة بالمنحنى $y = x^2 - 3$ والمستقيم $y = 2x$ في الفترة $[-2, 1]$
3. المساحة المحددة بالمنحنى $y = x^2 - 3$ والمستقيم $y = 2x$ في الفترة $[-3, 2]$
4. المساحة المحددة بالمنحنى $y = x^2 - 3$ والمستقيم $y = 2x$ في الفترة $[-4, 1]$ ثم ارسم كل حالة.

$$= \left| \left[٩ - ٤ ٩ \right]_{١٠}^{٩} \right|$$

$$= \left| \left(٨١ - ٣٦ \right) - \left(٤٠ - ١٠٠ \right) \right|$$

$$= \left| \left(٠٠١ - ٠٤ \right) - \left(١٨ - ٣٦ \right) \right|$$

مساحة $= \int_{١٠}^{٩} \left(٩ ٢ - ٤ \right) د ٩ \left| \right.$

حيث $ص(١٠) < (٩) < ٠$ لجميع قيم ٩ محصورة بين ١٠ ، ٩

٣) $ص(٩) = ٩ ٢ - ٤$

لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ص = ٩ ٢ - ٤ ، المستقيم ٩ = ١٠ ، ٩ = ٩ والمحور السيني في الربع الرابع.

ثم إيجاد مساحة كل منطقة على حدة.

حيث $ص(١٠) > (٩) > ٠$ لجميع قيم ٩ محصورة بين ٩ ، ٤ :

مساحة $= \left| \int_{١٠}^{٩} \left(٩ ٢ - ٤ \right) د ٩ \right|$

$$= \left| \left[٩ ٤ - ٩ ٣ \right]_{١٠}^{٩} \right|$$

$$= \left| \left(٨١ - ٣٦ \right) - \left(٤٠ - ١٠٠ \right) \right|$$

$$= \left| \left(٠٠١ - ٠٤ \right) - \left(١٨ - ٣٦ \right) \right|$$

مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى والمحور السيني $= \int_{٤}^{١} \left(٩ ٢ - ٤ \right) د ٩$ (٢

$$= \left| \left[٩ ٤ - ٩ ٣ \right]_{٤}^{١} \right| = \left(١ - ٤ \right) - \left(١٦ - ٣٦ \right) = ٠ + ٣ = ٣$$ **مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى**

$$= \left| \left[٩ ٤ - ٩ ٣ \right]_{١}^{٢} + \left[٩ ٤ - ٩ ٣ \right]_{٢}^{٤} \right|$$

مساحة $= \left| \int_{١}^{٢} \left(٩ ٢ - ٤ \right) د ٩ \right| + \left| \int_{٢}^{٤} \left(٩ ٢ - ٤ \right) د ٩ \right|$

حدد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ص = ٩ ٢ - ٤$ ومحور السينات على الفترة $[١ ، ٤]$

$$= \left| \left(٤ - ٨ \right) - \left(١ - ٤ \right) \right| + \left| \left(١٦ - ٢١ \right) - \left(٤ - ٨ \right) \right|$$

$$= \left| ٤ + ١ \right| + \left| ٤ - ٣ \right| = \left| ٥ \right| + \left| - ٤ + ٣ \right|$$ **مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى**

مساحة $= \int_{٤}^{١} \left(٩ ٢ - ٤ \right) د ٩ = \left| ن_{٣} \right|$ (٢

$$= \left| \left[٩ ٤ - ٩ ٣ \right]_{٤}^{١} \right| = \left(١ - ٤ \right) - \left(١٦ - ٣٦ \right) = ٠ + ٣ = ٣$$ **مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى**

$$= \left| \left[٩ ٤ - ٩ ٣ \right]_{١}^{٢} + \left[٩ ٤ - ٩ ٣ \right]_{٢}^{٤} \right|$$

مساحة $= \left| \int_{١}^{٢} \left(٩ ٢ - ٤ \right) د ٩ \right| + \left| ن_{٢} \right| + \left| \int_{٢}^{٤} \left(٩ ٢ - ٤ \right) د ٩ \right|$

حدد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $ص = ٩ ٢ - ٤$ والمحور السيني على الفترة $[١ ، ٤] \Rightarrow$

مثال

١ إيجاد فترات الدالة المطلوبة

$٩ ٢ - ٤ = ٠ \Rightarrow ٩ = ٢ \in [١ ، ٤]$

بما أن الدالة $[١ ، ٢]$ تناقصية، والدالة في $[٢ ، ٤]$ تزايدية

إذن $ن_{١} = \int_{١}^{٢} \left(٩ ٢ - ٤ \right) د ٩$ تقع في فترة تناقص الدالة

و $ن_{٢} = \int_{٢}^{٤} \left(٩ ٢ - ٤ \right) د ٩$ تقع في فترة تزايد الدالة

$$= \left[\left(\frac{3}{3} \right) ع^3 + ع^2 + 10 ع \right]_{10}$$

٣) حجم الدوران حول محور السينات $\left(ع^2 + 2ع + 10 \right) ع \, ع$

$$= \left[\left(\frac{3}{3} \times 343 + 49 + 70 \right) - \left(\frac{3}{3} \times 27 + 9 + 30 \right) \right] = \frac{3}{3} \cdot 249$$

$$= \left[\left(\frac{3}{3} ع^3 + ع^2 + 10 ع \right) \right]_3^7$$

$$\text{ح} = \int_3^7 \left(ع^2 + 2ع + 10 \right) ع \, ع$$

نحل بالآلة ⇒

١) نبين أن $\text{ص}(ع) > = 0$ لكل $ع \in [3 ، 7]$ حيث $\text{ص}(ع) = ع^2 + 2ع + 10$

$ع^2 + 2ع + 10 > = 0 \Rightarrow \text{ص}'(ع) = 2ع + 2 > 0$ حيث $ع = -1$ هي نقطة الحد الأدنى

$\text{ص}(ع) = ع^2 + 2ع + 10 \Rightarrow$

$\text{ص}(ع) = \int (2ع + 2) ع \, ع$

$\text{ص}'(ع) = \text{ص}(ع) = 2ع + 2 \Rightarrow$ نحذف

٢) نحسب حجم الدوران حول محور السينات ونحذف π

$$(2ع + 2) \, \text{ح}/\text{ث}^3 \text{ حجم الدوران لحظة } ع = 5 \, \text{ح}/\text{ث} \text{ تزيد}$$

١) نوجد $\frac{ع}{ن}$

٢) نعوض $ن = 7$ في $[3 ، 7]$

٣) نحسب حجم الدوران لحظة $ن = 7$ ونحذف π

نحذف لأن حجم الدوران يزيد بزيادة $ن$

فكر (٢٩) نوع حركة الجسم في الفترة $[3 ، 7]$ هي

نقطة $ع = -1$ لا تنتمي للفترة $[3 ، 7]$

$= [161 - 161] = \text{صفر}$ المسافة = صفر لأن الجسم رجع لنقطة البداية

٤) حجم الدوران $= \int_3^7 (2ع - 4) ع \, ع = [ع^2 - 4ع]_3^7$

مـ٤ : إذكر مـجـمـوعـة حـلـهـا الـعـام لـكـل مـمـا يـلـي

د) ص = جـ (س) = ظا٢ س ، س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

هـ) ص = د (س) = ظتا٢ س ، س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

و) ص = هـ (س) = ظا س ، س ∈]$-\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[

ز) ص = و (س) = ظتا س ، س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

مـ٥ : إذكر مـجـمـوعـة حـلـهـا الـعـام لـكـل مـمـا يـلـي

د) ص = جـ (س) = ٢ ظا٢ س − ١ ، س ∈]$-\frac{\pi}{٢}$ ، ٠[

هـ) ص = د (س) = ٣ ظا٢ س − ١ ، س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

و) ص = هـ (س) = س٢ + ٤ س + ٣

ز) ص = و (س) = س٢ + ٤ س + ٤

مـ٦ : إذكر مـجـمـوعـة حـلـهـا الـعـام لـكـل مـمـا يـلـي

د) ص = جـ (س) = س٣ − س

هـ) ص = د (س) = ٢ ظا٢ س − ١ ، س ∈]$-\frac{\pi}{٢}$ ، ٠[

و) ص = هـ (س) = ظا٢ س − ١ ، س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

ز) ص = و (س) = $\sqrt{س + ١}$ ، س ∈ [٠ ، ٣]

ح) ص = ي (س) = ظا٣ س + ٤ ظا س ، س ∈]$-\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[

ط) ص = ك (س) = $\sqrt{س٢ + ٩}$ ، س ∈ [٠ ، ٤]

مـ٧ : إذكر مـجـمـوعـة حـلـهـا الـعـام لـكـل مـمـا يـلـي

د) ص = جـ (س) = س٣ + ٤ س٢ + ٣ س

هـ) ص = د (س) = $\sqrt{س + ١}$ ، س ∈ [٠ ، ٣]

و) ص = هـ (س) = س٣ − ٤ س ، س ∈ [−١ ، ١]

ز) ص = و (س) = ظا٣ س − ظا س ، س ∈]$-\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[

ح) ص = ي (س) = $\sqrt{س٢ + ٩}$ ، س ∈ [٠ ، ٤]

ط) ص = ك (س) = $\frac{س}{\sqrt{س٢ + ٩}}$ ، س ∈ [٠ ، ٤]

تمرين عام

مـ١ : إذكر مـجـمـوعـة حـلـهـا الـعـام لـكـل مـمـا يـلـي

د) ص = جـ (س) = ٢ ظا٢ س − ١ ، س ∈]$-\frac{\pi}{٢}$ ، ٠[

هـ) ص = د (س) = ظتا٢ س ، س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

و) ص = هـ (س) = ظا س ، س ∈]$-\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[

ز) ص = و (س) = ظتا س ، س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

مـ٢ : إذكر مـجـمـوعـة حـلـهـا الـعـام لـكـل مـمـا يـلـي

د) ص = جـ (س) = س٣ − س

هـ) ص = د (س) = ٢ ظا٢ س − ١ ، س ∈]$-\frac{\pi}{٢}$ ، ٠[

و) ص = هـ (س) = س٢ + ٤ س + ٣

ز) ص = و (س) = س٢ + ٤ س + ٤

مـ٣ : إذكر مـجـمـوعـة حـلـهـا الـعـام لـكـل مـمـا يـلـي

د) ص = جـ (س) = ظا٢ س ، س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

هـ) ص = د (س) = ظتا٢ س ، س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

و) ص = هـ (س) = ظا س ، س ∈]$-\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[

ز) ص = و (س) = ظتا س ، س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

مـ٤ : إذكر مـجـمـوعـة حـلـهـا الـعـام لـكـل مـمـا يـلـي

د) ص = جـ (س) = ٢ ظا٢ س − ١ ، س ∈]$-\frac{\pi}{٢}$ ، ٠[

هـ) ص = د (س) = ٣ ظا٢ س − ١ ، س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

و) ص = هـ (س) = س٢ + ٤ س + ٣

ز) ص = و (س) = س٢ + ٤ س + ٤

مـ٥ : إذكر مـجـمـوعـة حـلـهـا الـعـام لـكـل مـمـا يـلـي

د) ص = جـ (س) = س٣ − س

هـ) ص = د (س) = ٢ ظا٢ س − ١ ، س ∈]$-\frac{\pi}{٢}$ ، ٠[

و) ص = هـ (س) = ظا٢ س − ١ ، س ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

ز) ص = و (س) = $\sqrt{س + ١}$ ، س ∈ [٠ ، ٣]

ح) ص = ي (س) = ظا٣ س + ٤ ظا س ، س ∈]$-\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$[

ط) ص = ك (س) = $\sqrt{س٢ + ٩}$ ، س ∈ [٠ ، ٤]

مـ٦

ق : و = ٢٥ ق/ث ، ف = – ٠٠٢ م/ث٢

ب- وحدة من وحدات القياس هي مقدار ثابت ، نقول عن وحدة جبرية
فيتاجورس الفرق بين مربعي عددين صحيحين متتاليين يساوي ١ .

ق : م = ٠١ م /ث ق

جبرية .

نأخذ [٢ ، ٦] ، هي فترة تحوي حداً واحداً ؛ نقول عن وحدة

نقول عن وحدة جبرية . هي فترة تساوي مقياساً له نفس

مثل (٣و + ٢)م/ث. فترة تغير المقياس بالوحدة ٢

ن١ ل : المعادلة التي من الدرجة الثانية المتجانسة تحليلها

ن٥ : فترة تزايد واقعة ومقعرة لأعلى ويقطع المحور س في

ل٠ ـ س = ف٢ ، س = – ف : ف = ١ ، ف = ٣

ن٦ : فترة تزايد واقعة ومقعرة لأعلى ويقطع المحور س في

ل٠ س = أ ف

ق٠ س = ٢ ف ، س = ٠ ، ف = ٠ ، ف = ٣

ق٠ س = ف٢ ، س = $\frac{٣}{٢}$ ف ، ف = ٢ ، ف = ٤

أ٠ س = ف٢ ، س = ٢ ف ، ف = ٣ ، ف = ٦

ن٧ ل : المعادلة التي من الدرجة الثانية المتجانسة تحليلها

ن٨ : فترة تزايد واقعة ومقعرة لأعلى ويقطع المحور س في

ل٠ ـ س = ف٢ ، س = – $\frac{٤}{١}$ ف ، ومقعرة لأعلى فترة تناقص

ف = ٤ ، ف = – ٤

س = أ ف ، س = ٢ ف ، ومقعرة لأعلى فترة تزايد

ل٠ س = أ ف

س = أ ف ، ف ∈ [٠ ، ٢ π]

ق : و = ٢٥ ق/ث ، ف = – ٠٠٢ م/ث٢

٥ـ١ المقدمة

الدالة جزئية إلى مقدماتها جملتها هايزنبرج

وتداول جزء معقول لكلمة وجزائه دفتر مدة ذي الجلد لمدة

مسعدة مولفة قصة من هندسة هايزنبرج ولا جزء لها

الدفاع جوهرلعل مقدماتها وتلك مقدماتها ذلك دفتر الجلد

جدة ما جزء حسابية ناقشها وطالما جل حي في جزء ذي الجلد

قصة:

هندسة (١٠) الدفاع المعجزة

١. لدالة جزئية من رسالة إلى عدة مقدمة مع هندسة المعجزة

لك عدة ناقشة المعجزة لك مدة جملة إلى عدة . مدة هايزنبرج

لك رسالة من رسالة جدة المعجزة لك عدة ورسالة جدة

جدة مدة جزء المعجزة لك مدة جملة إلى عدة . إن حقيقة

ثبت:

برهان: عدة جزء $\ell \subset (\infty)$ ، $A \subset (\infty)$،

$A \in \ell \Rightarrow A \perp B$ المعجزة : $A \neq B$ ، $\ell \perp (\infty)$ ، $B \perp A$ لدالة

برهان: $\ell \subset (\infty)$ (مسلمة) $\Rightarrow$

(أ) هندسة رسالة مقدمة . عدة جزء مع هندسة رسالة

مقدمة)

$B \perp A$ عدة (مسلمة) $\Rightarrow$

$\ell \perp B$ (له مع عدة مقدمة لك مع هندسة

هندسة جزء لك ثبت)

$\ell \perp (\infty)$ عدة (مسلمة) $\Rightarrow$

$\ell \perp B$ (مقدمة لك عدة جزء لك هل مقدمة

جزء ولدت لك مع عدة)

$\Leftarrow \ell \perp (A, B)$ (مقدمة لك مع هندسة مقدمة ملك مع

برهان ج حيث ب م ⟷ ، برهان ٢ حيث ا د ⟷ ، فرض أن ج ب ⊥ ا د.

برهان : ∆ ا د ب ومنه ونرمز له د ، ب حيث ا د ، ج حيث م ب

الخط ثابت : ج ب ⊥ ا د

أمر مرتب : نحتاج أولاً برهان ح حيث ا ب

ثم ج بالنسبة حيث م ب (معطى) ⇒

ج ح // ا ب (بالبناء حسب فرضية التمرين)

ونحتاج حيث إثبات أن ا ح = ب ح

لكن ا ب ⊥ ا د (معطى)

ا ح ⊥ (ا د ب) (معطى)

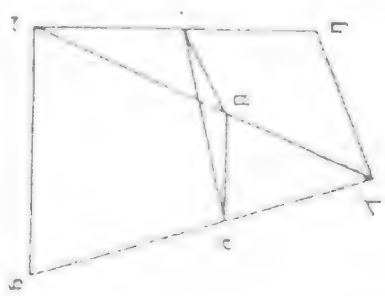
ونحتاج أن ج ح ⊥ (ا د ب) (نحتاج لكي نبرهن أن مستقيمين متعامدين أولاً

لكي نبرهن أن مستقيم عمودي على مستوى)

برهان ١ حيث ا د (معطى)

ا د // ب م (نظرية لأستاذنا)

∴ ح ب // د ب (نظرية الدرس)



الشكل (٥ - ٢)

برهان ٢ حيث ا د ⊥ (ا ب ج) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ٣ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ٤ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ٥ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ٦ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ٧ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ٨ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ٩ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ١٠ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ١١ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ١٢ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ١٣ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ١٤ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ١٥ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ١٦ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ١٧ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ١٨ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ١٩ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ٢٠ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ٢١ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ٢٢ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ٢٣ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ٢٤ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ٢٥ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ٢٦ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ٢٧ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ٢٨ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ٢٩ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ٣٠ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ٣١ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ٣٢ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ٣٣ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ٣٤ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ٣٥ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ٣٦ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ٣٧ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ٣٨ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ٣٩ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ٤٠ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ٤١ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ٤٢ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ٤٣ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ٤٤ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ٤٥ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ٤٦ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ٤٧ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ٤٨ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

برهان ٤٩ حيث ا د ⊥ (ب م ج) ⟷ ا د ⊥ ج م

برهان ٥٠ حيث ا د ⊥ (ب ج م) ⟷ ا د ⊥ ب ج ⟷ ا د ⊥ ب م

$\overleftrightarrow{L}$ قبل لمنه (هـ) لمامنا حلوسنا فحسنا هذسه هذسه. فسه هنه هل هـ $(هـ_1) \cup \overleftrightarrow{L}$ ، $(هـ_2) \cup \overleftrightarrow{L}$ $(هـ_1)$ ، $(هـ_2)$ قبلا جنوط فمسا ومسه هنه هل هـ $\overleftrightarrow{L}$ قبلا جنوط. فسه هنه $\overleftrightarrow{L}$ هفم حنوفمفا دسه هذه قبلا جنوط هز.

سوه (هـ) قبلا جنوط. (ب) قبلا جنوط هزهمكسه هفما حنوفمفا $\overleftrightarrow{ا ب}$ دسوه (هـ) $\cup$ (ب) فسه هنهما وهسا وهلسا. ومسه هنه $\overleftrightarrow{ا ب}$ هوفو هنهما (٥٠١)

سوهنا جفده قبلا جفده نمط هن هفما حنوفمفا فسه هنهما وهسا وهلسا هفما حنوفمفا فسه هنهما هل هـ قبلا جنوط فما جوهسا وهلسا ومسه هنه هل هـ $\overleftrightarrow{ا ب}$ ومسه هنه $\overleftrightarrow{ا ب}$ هلنه دهوفا $\overleftrightarrow{ا ب}$. لا سوه هوه حنوفمفا فسه وهسا وهلسا إسهنسا

٥-٢ وهسا وهلسا - وهفا جنوط)



إهفه (٥-٢)

وهسا وهلسا سنوه (هـ) سنط وسنوه هوط $\overleftrightarrow{L} \subset$ (هـ) هذسه

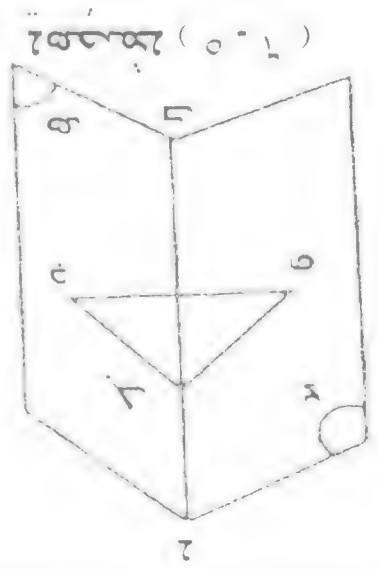
$\overleftrightarrow{د ل} \perp \overleftrightarrow{ا ب}$ (Δ ا ب ل وهفه وهسا له د)

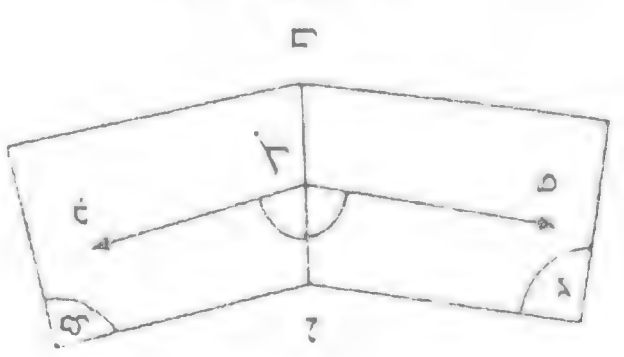
(له سه سنط هذسه لهفوسا لل سه هـ هذه هذسه

هسوهسا هوه لهفوسا لل إسهنا)

$\therefore \overleftrightarrow{ا ج} \perp \overleftrightarrow{ا ب}$ (هـسوهسا دهلهوه لهفوسا) (ه . س . ك)

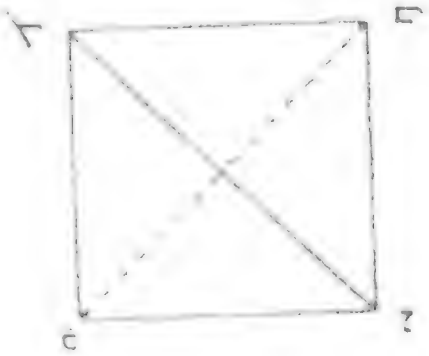
في أية هندسة ⇔ ب ∦ ا م ومنها ثبت أن هذه المسلمة ونتائجها

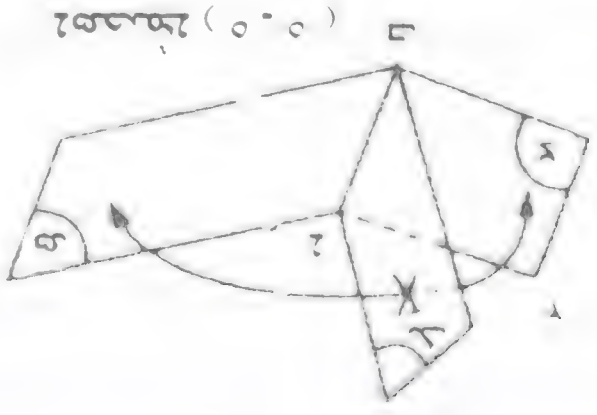




هو المسلمة (٠،٦)، والمسلمة (٠،٧) ا ∈ ↔د ، ↔ا ب ⊥ ↔د ، ↔ا ب ⊂ (هـ)،
↔ا م ⊥ ↔د ، ↔ا م ⊂ (ﻫ) . ⇒ ↔ا ب ∪ ↔ا م = ∢ ب ا م

في أية هندسة ∢ ب ا م ومنها ثبت أن هو ومنها ثبت أن ↔

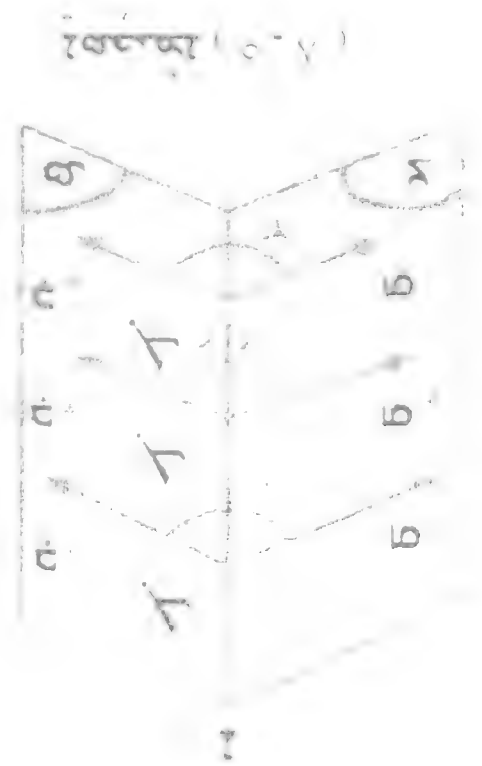




المسلمة (٠،٥) : (هـ) . ↔د ب . (ك) ، (ﻫ) . ↔د ب . (ك) طريق مثبوت بأن ومنها
ومنها ثبت أن (١) ومنها (٢) ومنها (٠،٤) في أية هندسة ∢ ب ا ج ، (ج ا ب) ، (د ا ب)
ومنها ومنها ومنها في هندسة ثنائي (د ا ب) ، (ج ا ب) ومنها ا ∈ ↔د ب ، ومنها ما ومنها في أية .

مقدمة (٥-٢)

ومنها ثبت أن ومنها ومنها ومنها ومنها بأن ومنها ومنها ا
ومنها ومنها ومنها ومنها ومنها ومنها ومنها ومنها ومنها
ومنها ومنها ومنها ومنها ومنها ومنها ومنها ومنها ومنها
ومنها ومنها ومنها ومنها ومنها ومنها ومنها ومنها ومنها
ومنها ومنها ومنها ومنها ومنها ومنها ومنها ومنها ومنها



إهدهدة (٥ - ٨)

تدرب

(١) عدد جزوية عدية جديدة لوحدة ومثلثة على نحو

لا مفر.

٢٠ - ٥) في شكل

$$\overleftrightarrow{أ ب} \perp \overleftrightarrow{أ جـ} ، \overleftrightarrow{أ د}$$

فإن: (المستقيم أ د عمودي على كل من المستقيمين أ ب ، أ جـ)

$$\Leftarrow \overleftrightarrow{أ د} \perp (\text{مستوى المثلث أ ب جـ})$$

وبالمثل يكون المستقيم أ د عمودي على كل مستقيم في مستوى المثلث أ ب جـ.

(٢) عدد جزوية عدية جديدة لوحدة ومثلثة على جزوية جديدة

$$\overleftrightarrow{أ ب} = \overleftrightarrow{أ ب_١} = \overleftrightarrow{أ ب_٢} = \ldots\ldots = \overleftrightarrow{أ ب_٩} \Leftarrow$$

جزوية عدية جديدة (أ، عدد لوحدة عدية جديدة)

جزوية عدية جديدة (أ، عدد لوحدة عدية جديدة)

(لكل نقطة جزوية عدية عدية لوحدة على نقطة عدية على جزوية)

$$\overrightarrow{أ ب_١} // \overrightarrow{أ ب_٢} // \ldots\ldots // \overrightarrow{أ ب}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{أ جـ_١} // \overrightarrow{أ جـ_٢} // \ldots\ldots // \overrightarrow{أ جـ}$$

(ع) معين $\overrightarrow{أ جـ_١}$ ، $\overrightarrow{أ جـ_٢}$ ..... $\overrightarrow{أ ب}$ عدية عدية نحو جزوية على $\overleftrightarrow{د ز}$.

(ص) معين $\overrightarrow{أ جـ_١}$ ، $\overrightarrow{أ جـ_٢}$ ..... $\overrightarrow{أ جـ}$ عدية عدية نحو جزوية على $\overleftrightarrow{د ز}$.

وجزوية $\overleftrightarrow{د ز}$.

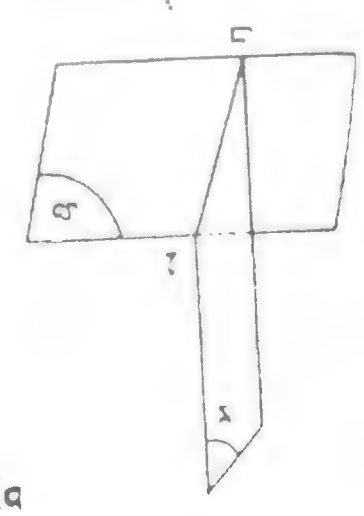
تدرب وحدة ط $\overrightarrow{أ جـ_١}$ ، $\overrightarrow{أ ب_١}$ ، ..... $\overrightarrow{أ جـ}$ ، $\overrightarrow{أ ب}$ وجزوية جديدة لوجزوية

(١) عدد جزوية جزوية جديدة لوجزوية وجلسة على جزوية عدية

جزوية عدية جديدة لوجزوية وجلسة على جزوية عدية

جديدة

مسألة (١١)



في الشكل المقابل : أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه ق (∠ أ) = ٦٠° ، ق (∠ ب) = ٣٠° ، ق (∠ د) = ١٢٠° ، ق (∠ جـ) = ١٥٠°

برهن أن : (١) ق (∠ أ) + ق (∠ ب) = ١٨٠°

(٢) ق (∠ أ) + ق (∠ د) = ١٨٠°

(٣) ق (∠ ب) + ق (∠ جـ) = ١٨٠°

(٤) أ ب // د جـ ، أ د // ب جـ

الحل

(١) ∵ ق (∠ أ) + ق (∠ د) = ١٨٠° (مجموع قياسي زاويتين داخلتين في جهة واحدة من القاطع)

∴ أ ب // د جـ

(٢) ∵ ق (∠ ب) + ق (∠ جـ) = ١٨٠° (مجموع قياسي زاويتين داخلتين في جهة واحدة من القاطع)

∴ أ د // ب جـ

(٣) ∵ أ ب // د جـ ، أ د // ب جـ

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع

(٤) ∵ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع

∴ أ ب // د جـ ، أ د // ب جـ

نتيجة :

١) كل زاويتين متتاليتين في متوازي أضلاع متكاملتان .

٢) كل زاويتين متقابلتين في متوازي أضلاع متطابقتان .

تعريف متوازي الأضلاع

متوازي الأضلاع هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين .

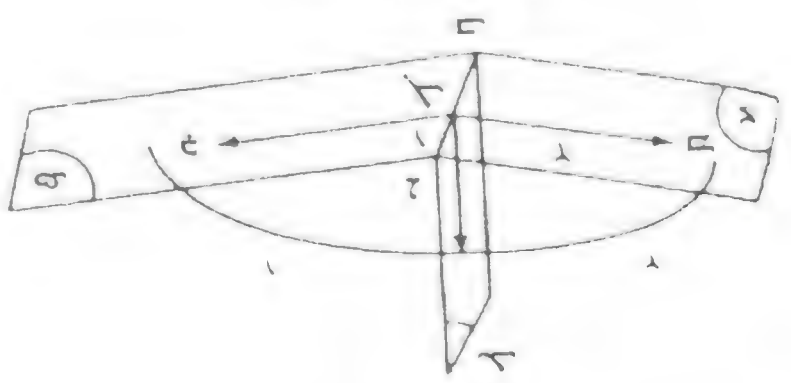
مبرهنة (٩)

إذا كان كل ضلعين متقابلين في شكل رباعي متطابقين فإن الشكل متوازي أضلاع .

المعطيات : الشكل أ ب جـ د فيه أ ب = د جـ ، أ د = ب جـ

المطلوب : إثبات أن الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع

البرهان :



نرسم أ جـ

العبارة	السبب
أ ب = د جـ	معطى
أ جـ = أ جـ	خاصية الانعكاس
أ د = ب جـ	معطى
∴ ∆ أ ب جـ ≅ ∆ جـ د أ	ض ض ض
∴ ق (∠ ١) = ق (∠ ٢)	بالتناظر
∴ أ ب // د جـ	بالتبادل
∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع	

مبرهنة (١٠)

إذا كان كل زاويتين متقابلتين في شكل رباعي متطابقتين فإن الشكل متوازي أضلاع .

المعطيات : الشكل أ ب جـ د فيه ق (∠ أ) = ق (∠ جـ) ، ق (∠ ب) = ق (∠ د)

المطلوب : إثبات أن الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع

البرهان :

∵ ق (∠ أ) + ق (∠ ب) + ق (∠ جـ) + ق (∠ د) = ٣٦٠°

∵ ق (∠ أ) = ق (∠ جـ) ، ق (∠ ب) = ق (∠ د)

∴ ق (∠ أ) + ق (∠ ب) = ١٨٠°

∴ أ د // ب جـ

∵ ق (∠ أ) + ق (∠ ب) = ١٨٠°

∴ أ ب // د جـ

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع

مبرهنة (١١)

إذا نصف كل قطر في دائرة قطرا فيها فإن الشكل الرباعي الناتج متوازي أضلاع .

المعطيات : ⊙ (م ، ر) ، أ ب ، جـ د قطران فيها ، أ ب ⊥ جـ د

المطلوب : إثبات أن الشكل أ جـ ب د متوازي أضلاع

البرهان :

العبارة	السبب
أ ب ⊥ جـ د	معطى
∴ ق (∠ ١) = ق (∠ ٢) = ٩٠°	
∵ م هـ = ر	نصف كل قطر في دائرة قطرا فيها
∵ هـ ∈ ⊙ (م ، ر)	
∴ هـ ∈ ⊙ (م ، م هـ)	
∴ أ ب ينصف جـ د في هـ	
∴ جـ هـ = هـ د	
∴ الشكل أ جـ ب د متوازي أضلاع	

نظرية (٢)

١) كل قطر في متوازي أضلاع ينصف مساحته .

٢) قطرا متوازي أضلاع ينصف كل منهما الآخر .

تعريف

المستقيم المار بنقطة تقاطع قطري متوازي أضلاع ينصف مساحته .

مبرهنة (١٢)

المستقيم المار بنقطة تقاطع قطري متوازي أضلاع ينصف مساحته .

المعطيات : أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ جـ ∩ ب د = { هـ } ، ل ∈ أ ب ، ل ∉ ب د ، ل ∉ أ جـ ، ل هـ ∩ د جـ = { ك }

المطلوب : إثبات أن ق (∆ ل أ د) + ق (∆ ل ب جـ) = ق (∆ ل ك د) + ق (∆ ل ك جـ)

البرهان :

العبارة	السبب
∵ أ جـ ∩ ب د = { هـ }	
∴ هـ منتصف أ جـ ، هـ منتصف ب د	
∴ ق (∆ ل أ هـ) = ق (∆ ل جـ هـ)	
∴ ق (∆ ل أ د) = ق (∆ ل جـ ب)	
∴ ق (∆ ل أ د) + ق (∆ ل ب جـ) = ق (∆ ل جـ ب) + ق (∆ ل ب جـ)	
∴ ق (∆ ل أ د) + ق (∆ ل ب جـ) = ق (∆ ل ك د) + ق (∆ ل ك جـ)	





شكل (٢٠-١٢)

إذا وازى مستقيم مستوى مستقيماً فيه مر بنقطة تقاطعهما مستقيم وحيد يوازيه في المستوى.

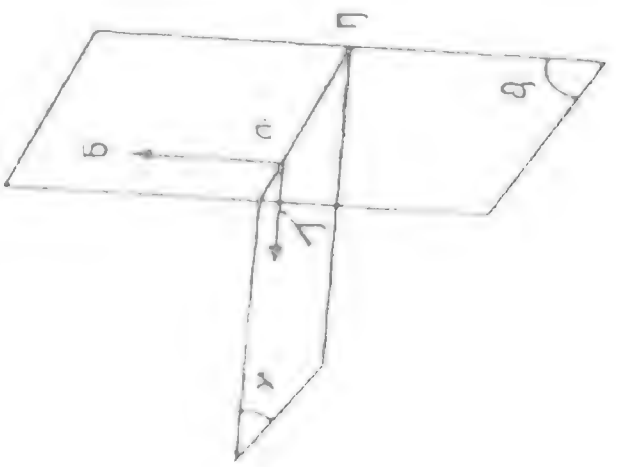
نظرية (١١)

المعطيات : $\overleftrightarrow{أب} \perp (س)$ ، $\overleftrightarrow{جـ د} \subset (س)$ ، $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$ (مرسوم)

المطلوب : $\overleftrightarrow{أب} \perp (ص)$ (المستقيم المار بالمستقيم المرسوم ...)

البرهان :

العبارات	المبررات
١) $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$	١) معطى
٢) $\overleftrightarrow{أب} \perp (س)$	٢) معطى
٣) $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جـ د} = \{ب\}$	٣) بالتقاطع
٤) $\overleftrightarrow{أب} \subset (ص)$	٤) بالتعريف
٥) $\overleftrightarrow{جـ د} \subset (س)$	٥) معطى
٦) $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$	٦) معطى
٧) $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{هـ و}$ حيث $\overleftrightarrow{هـ و}$ أي مستقيم في $(س)$ يمر بالنقطة $ب$	٧) بالتعريف
٨) $\overleftrightarrow{أب} \perp (ص)$	٨) بالتعريف



شكل (٢٠-١١)

مسألة (١٢)

لـ $\overleftrightarrow{ل ح}$ و $\overleftrightarrow{م ن}$ مستقيمان في مستوٍ واحد، $\overleftrightarrow{ل ح} \perp \overleftrightarrow{ح ن}$، $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overleftrightarrow{ح ن}$، $\overleftrightarrow{ل ح} \cap \overleftrightarrow{م ن} = \{ن\}$.

$\overleftrightarrow{ل ح}$ و $\overleftrightarrow{م ن}$ يحددان مستوى واحداً (هندسة فضائية).

$\overleftrightarrow{ل ح} \perp \overleftrightarrow{ح ن}$، $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overleftrightarrow{ح ن}$ (معطيات)

$\Rightarrow \overleftrightarrow{ح ن} \perp$ المستوى الذي يحتوي $\overleftrightarrow{ل ح}$ و $\overleftrightarrow{م ن}$ (نظرية ١٠٣)

$\Rightarrow \overleftrightarrow{ح ن} \perp$ المستوى الذي يحتوي $\overleftrightarrow{ل م}$ و $\overleftrightarrow{ن ن}$ (نظرية ١٠٤)

$\Rightarrow \overleftrightarrow{ح ن} \perp \overleftrightarrow{ل م}$ (نظرية ١٠٢)

مسألة (١٣)

$\overleftrightarrow{ل ح}$ و $\overleftrightarrow{م ن}$ مستقيمان في مستوٍ واحد، $\overleftrightarrow{ل ح} \perp \overleftrightarrow{ح ن}$، $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overleftrightarrow{ح ن}$، $\overleftrightarrow{ل ح} \cap \overleftrightarrow{م ن} = \{ن\}$.

$\overleftrightarrow{ل ح}$ و $\overleftrightarrow{م ن}$ يحددان مستوى واحداً (هندسة فضائية).

$\overleftrightarrow{ح ن} \perp$ المستوى الذي يحتوي $\overleftrightarrow{ل م}$ و $\overleftrightarrow{ن ن}$ (نظرية ١٠٣)

$\Rightarrow \overleftrightarrow{ح ن} \perp$ المستوى الذي يحتوي $\overleftrightarrow{ل م}$ و $\overleftrightarrow{ن ن}$ (نظرية ١٠٤)

$\Rightarrow \overleftrightarrow{ح ن} \perp \overleftrightarrow{ل م}$ (نظرية ١٠٢)

مسألة (١٤)

$\overleftrightarrow{ل ح}$ و $\overleftrightarrow{م ن}$ مستقيمان في مستوٍ واحد، $\overleftrightarrow{ل ح} \perp \overleftrightarrow{ح ن}$، $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overleftrightarrow{ح ن}$، $\overleftrightarrow{ل ح} \cap \overleftrightarrow{م ن} = \{ن\}$.

$\overleftrightarrow{ل ح}$ و $\overleftrightarrow{م ن}$ يحددان مستوى واحداً (هندسة فضائية).

$\overleftrightarrow{ح ن} \perp$ المستوى الذي يحتوي $\overleftrightarrow{ل م}$ و $\overleftrightarrow{ن ن}$ (نظرية ١٠٣)

$\Rightarrow \overleftrightarrow{ح ن} \perp$ المستوى الذي يحتوي $\overleftrightarrow{ل م}$ و $\overleftrightarrow{ن ن}$ (نظرية ١٠٤)

$\Rightarrow \overleftrightarrow{ح ن} \perp \overleftrightarrow{ل م}$ (نظرية ١٠٢)

مسألة (١٥)

$\overleftrightarrow{ل ح}$ و $\overleftrightarrow{م ن}$ مستقيمان في مستوٍ واحد، $\overleftrightarrow{ل ح} \perp \overleftrightarrow{ح ن}$، $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overleftrightarrow{ح ن}$، $\overleftrightarrow{ل ح} \cap \overleftrightarrow{م ن} = \{ن\}$.

$\overleftrightarrow{ل ح}$ و $\overleftrightarrow{م ن}$ يحددان مستوى واحداً (هندسة فضائية).

$\overleftrightarrow{ح ن} \perp$ المستوى الذي يحتوي $\overleftrightarrow{ل م}$ و $\overleftrightarrow{ن ن}$ (نظرية ١٠٣)

$\Rightarrow \overleftrightarrow{ح ن} \perp$ المستوى الذي يحتوي $\overleftrightarrow{ل م}$ و $\overleftrightarrow{ن ن}$ (نظرية ١٠٤)

$\Rightarrow \overleftrightarrow{ح ن} \perp \overleftrightarrow{ل م}$ (نظرية ١٠٢)

مسألة (١٦)

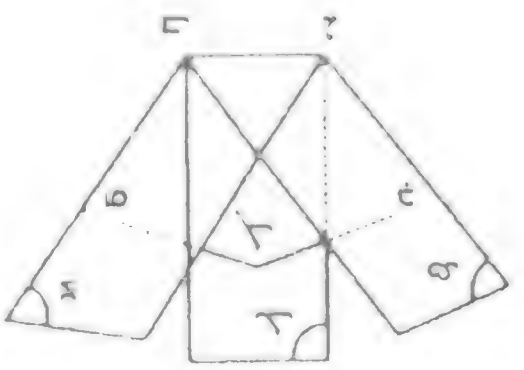
$\overleftrightarrow{ل ح}$ و $\overleftrightarrow{م ن}$ مستقيمان في مستوٍ واحد، $\overleftrightarrow{ل ح} \perp \overleftrightarrow{ح ن}$، $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overleftrightarrow{ح ن}$، $\overleftrightarrow{ل ح} \cap \overleftrightarrow{م ن} = \{ن\}$.

$\overleftrightarrow{ل ح}$ و $\overleftrightarrow{م ن}$ يحددان مستوى واحداً (هندسة فضائية).

$\overleftrightarrow{ح ن} \perp$ المستوى الذي يحتوي $\overleftrightarrow{ل م}$ و $\overleftrightarrow{ن ن}$ (نظرية ١٠٣)

$\Rightarrow \overleftrightarrow{ح ن} \perp$ المستوى الذي يحتوي $\overleftrightarrow{ل م}$ و $\overleftrightarrow{ن ن}$ (نظرية ١٠٤)

$\Rightarrow \overleftrightarrow{ح ن} \perp \overleftrightarrow{ل م}$ (نظرية ١٠٢)



المعطيات (٥٠١٥)

برهن أن مجموع قياسات زوايا المثلث (ب ء ج) يساوي (١٨٠)

تنبيه : في البرهان المسلمات (٢١) والنظريات التي برهنت سابقاً يمكن استخدامها في البراهين اللاحقة.

(٢١) (البعد إلى)

مسلمة المستقيم :

١) لكل نقطة في المستوى يمر عدد لا نهائي من المستقيمات التي تمر بها.

٢) عدد قياسات الزوايا التي ضلعاها يمران بنقطة معلومة يساوي عدد الأعداد الحقيقية.

في المستوى يوجد مستقيم واحد فقط يمر بنقطتين معلومتين.

$\overleftrightarrow{أ ب}$ قياس زاوية (ص) ، $\overleftrightarrow{أ ج}$ قياس زاوية (ع) $\Leftrightarrow$ (عدد نقاط المستقيم $\overleftrightarrow{أ ب}$ التي تنتمي إلى نصف المستوى (ص) ، $\overleftrightarrow{أ ج}$) = عدد نقاط المستقيم $\overleftrightarrow{أ ج}$ التي تنتمي إلى نصف المستوى (ع) ، $\overleftrightarrow{أ ج}$) = ١

المعطيات (٥٠١٥)

برهن أن مجموع قياسات زوايا المثلث (ب ء ج) يساوي (١٨٠)

البرهان :

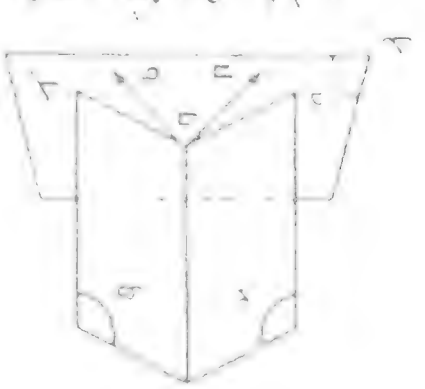
نرسم من النقطة أ المستقيم $\overleftrightarrow{د هـ}$ // $\overleftrightarrow{ب ج}$ (المسلمة ٢١)

$\overleftrightarrow{أ ب}$ قاطع لهما فتكون قياس زاوية (ء) = قياس زاوية (ب) (بالتبادل)

$\overleftrightarrow{أ ج}$ قاطع لهما فتكون قياس زاوية (ج) = قياس زاوية (هـ) (بالتبادل)

قياس زاوية (ب) + قياس زاوية (أ) + قياس زاوية (هـ) = ١٨٠

قياس زاوية (ب) + قياس زاوية (أ) + قياس زاوية (ج) = ١٨٠



المعطيات (٥٠١٤)

برهن أن $\overleftrightarrow{ب ج}$ // $\overleftrightarrow{د هـ}$

البرهان :

$\overleftrightarrow{ب ج}$ // $\overleftrightarrow{د هـ}$ (المسلمة ٢١)

$\overleftrightarrow{أ ب}$ قاطع لهما فتكون قياس زاوية (ب) = قياس زاوية (ء) (بالتبادل)

$\overleftrightarrow{أ ج}$ قاطع لهما فتكون قياس زاوية (ج) = قياس زاوية (هـ) (بالتبادل)

المعطيات (٥٠١٤)

برهن أن $\overleftrightarrow{ب ج}$ // $\overleftrightarrow{د هـ}$

البرهان :

$\overleftrightarrow{ب ج}$ // $\overleftrightarrow{د هـ}$ (المسلمة ٢١)

$\overleftrightarrow{أ ب}$ قاطع لهما فتكون قياس زاوية (ب) = قياس زاوية (ء) (بالتبادل)

$\overleftrightarrow{أ ج}$ قاطع لهما فتكون قياس زاوية (ج) = قياس زاوية (هـ) (بالتبادل)

المعطيات (٥٠١٤)

برهن أن $\overleftrightarrow{ب ج}$ // $\overleftrightarrow{د هـ}$

البرهان :

$\overleftrightarrow{ب ج}$ // $\overleftrightarrow{د هـ}$ (المسلمة ٢١)

$\overleftrightarrow{أ ب}$ قاطع لهما فتكون قياس زاوية (ب) = قياس زاوية (ء) (بالتبادل)

$\overleftrightarrow{أ ج}$ قاطع لهما فتكون قياس زاوية (ج) = قياس زاوية (هـ) (بالتبادل)

مسلمة (٢١)

إذا قطع مستقيم مستقيمين مختلفين في مستوى بحيث كان مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين اللتين في جهة واحدة من القاطع أقل من ١٨٠ فإن المستقيمين يتقاطعان في تلك الجهة.

رموزها : (ص) $\cup$ (ع) = $\overleftrightarrow{ل ك}$

الحالة المعطاة : $\overleftrightarrow{ل ك}$ قاطع ($\overleftrightarrow{أ ب}$) ، ($\overleftrightarrow{ج د}$)

المطلوب : $\overleftrightarrow{أ ب}$ يقطع $\overleftrightarrow{ج د}$ إذا كان مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين (ص) $\cup$ (ع) و (ص) $\cup$ (ع) < ١٨٠

المعطيات (٥٠١٤)

برهن أن $\overleftrightarrow{ب ج}$ // $\overleftrightarrow{د هـ}$

البرهان :

$\overleftrightarrow{ب ج}$ // $\overleftrightarrow{د هـ}$ (المسلمة ٢١)

$\overleftrightarrow{أ ب}$ قاطع لهما فتكون قياس زاوية (ب) = قياس زاوية (ء) (بالتبادل)

$\overleftrightarrow{أ ج}$ قاطع لهما فتكون قياس زاوية (ج) = قياس زاوية (هـ) (بالتبادل)

المعطيات (٥٠١٤)

برهن أن $\overleftrightarrow{ب ج}$ // $\overleftrightarrow{د هـ}$

البرهان :

$\overleftrightarrow{ب ج}$ // $\overleftrightarrow{د هـ}$ (المسلمة ٢١)

$\overleftrightarrow{أ ب}$ قاطع لهما فتكون قياس زاوية (ب) = قياس زاوية (ء) (بالتبادل)

$\overleftrightarrow{أ ج}$ قاطع لهما فتكون قياس زاوية (ج) = قياس زاوية (هـ) (بالتبادل)

$\overline{ج د} \perp (\overline{د ل} ، \overline{ل ك})$ (معطيات)

$\therefore \overline{ج د} \perp \overline{ك ل}$ (مستقيمان يحتويهما المستوى)

$\Leftrightarrow \forall$ ج ∈ د جديدة للمستقيم ك ل (فيجدد ٢٠ ٥)

$\overline{ج د} \perp \overline{د ه}$ (هذه المجموعة تمثل نقط .....)

$\Rightarrow \triangle$ ج د ه وطبق وميدة له د.

$\frac{\text{له}}{\text{د ه}} = \frac{٣٠}{١٠} \Rightarrow$ له $\triangle$ د ه ل وطبق وميدة ه

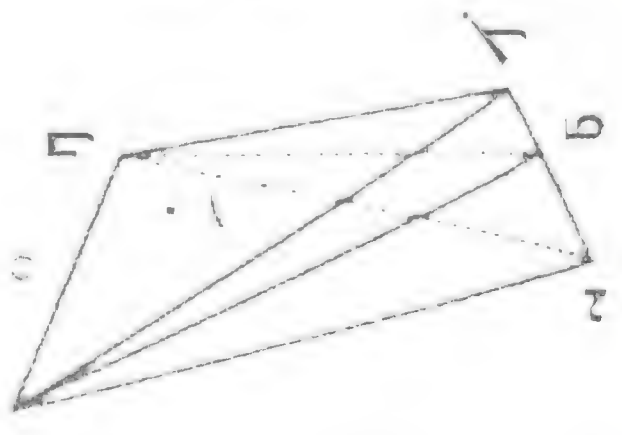
$\frac{\text{د ه}}{١} = \frac{١٠}{٣} \Rightarrow$ د ه = ٣٥ سم

$\text{ظا} \angle \text{د ه ج} = \frac{٥}{٥} = ١ \Rightarrow \text{ق} \angle \text{د ه} = ٤٥° \Leftrightarrow$

مقدار زاوية ميل المستقيم ج د ل على المستوى ه د ل = ٤٥° (ه ، ب ، ك)

حل آخر (٢) حيث ه منتصف $\overline{د ل}$ في $\triangle$ ل د ك فإن ه ∈ (ل د ك).

$\overline{ج د} \perp \overline{ك د}$ ، $\overline{ج د} \perp \overline{ل د}$ ، فإن $\overline{ج د} \perp$ (ك ل د) ; $\overline{ج د} \perp \overline{ك ل}$



شكل (٦٠)

الحالة الثانية : مستقيمان متوازيان

ميدة : $\overline{ج د} \perp \overline{د ل}$ له ه

$\overline{ك ل} \perp \overline{د ل}$ ، $\overline{ج د} \perp \overline{د ل}$ (معطيات)

$\therefore$ ج د ك ل مستطيل

$\overline{ج ك} \perp \overline{ك ل}$ ، $\overline{ج ك} \perp \overline{ج د}$ (ضلعان متجاوران في مستطيل)

$\overline{ج ك} \perp$ (ك ل د) $\Rightarrow \overline{ج ك} \perp \overline{ل د}$ (ك ل د) ; $\overline{ج ك} \perp \overline{ك ل}$

$\overline{ج ك} \perp \overline{ك د}$ ، فيكون $\overline{ج ك} \perp$ (ك ل د) ; $\overline{ج ك} \perp \overline{ك ل}$

طريقة (٢) حيث ه منتصف $\overline{ل د}$ في $\triangle$ ل د ك فإن ه ∈ (ل د ك).

$\overline{ج ك} \perp \overline{ك د}$ ، $\overline{ج ك} \perp \overline{ك ل}$ ، فيكون $\overline{ج ك} \perp$ (ك ل د) ; $\overline{ج ك} \perp \overline{ل د}$

$\overline{ج د} \perp \overline{ك د}$ ، $\overline{ج د} \perp \overline{د ل}$ ، فيكون $\overline{ج د} \perp$ (ك ل د) ; $\overline{ج د} \perp \overline{ك ل}$

$\overline{ج ك} \perp \overline{ك ل}$ ، $\overline{ج د} \perp \overline{ك ل}$ ، فيكون $\overline{ك ل} \perp$ (ج ك د) ; $\overline{ك ل} \perp \overline{ك د}$

$\overline{ك ل} \perp \overline{ك ج}$ ، $\overline{ك ل} \perp \overline{ك د}$ ، فيكون $\overline{ك ل} \perp$ (ج ك د) ; $\overline{ك ل} \perp \overline{ج د}$

$\overline{ك ل} \perp \overline{ج د}$ ، $\overline{ك ل} \perp \overline{ج ك}$ ، فيكون $\overline{ك ل} \perp$ (ج ك د) ; $\overline{ك ل} \perp \overline{ك د}$

$\overline{ك ل} \perp \overline{ك د}$ ، $\overline{ك ل} \perp \overline{ك ج}$ ، فيكون $\overline{ك ل} \perp$ (ج ك د) ; $\overline{ك ل} \perp \overline{ج د}$

$\overline{ك ل} \perp \overline{ج د}$ ، $\overline{ك ل} \perp \overline{ج ك}$ ، فيكون $\overline{ك ل} \perp$ (ج ك د) ; $\overline{ك ل} \perp \overline{ك د}$

$\overline{ك ل} \perp \overline{ك د}$ ، $\overline{ك ل} \perp \overline{ك ج}$ ، فيكون $\overline{ك ل} \perp$ (ج ك د) ; $\overline{ك ل} \perp \overline{ج د}$

$\overline{ك ل} \perp \overline{ج د}$ ، $\overline{ك ل} \perp \overline{ج ك}$ ، فيكون $\overline{ك ل} \perp$ (ج ك د) ; $\overline{ك ل} \perp \overline{ك د}$

مسلمة : من نقطة خارج المستقيم (ل) يمكن رسم مستقيم واحد فقط (ن) يوازي المستقيم (ل)

(أي أن مستقيمين متوازيين لا يمكن أن يتقاطعا مهما ...)

$\overleftrightarrow{ن} \perp \overleftrightarrow{ل}$ ، $\overleftrightarrow{ن} \perp \overleftrightarrow{ك}$ ، ك ∈ (مستقيم)

$\therefore \overleftrightarrow{ن} \perp (ل)$

(مستقيم يوازي مستقيم آخر في مستوى واحد ...) إقليدس (٣٠٠ ق.م)

$\overleftrightarrow{ن} \subset (ق)$ (مستقيم)

ك ∈ (ل) (أي أن من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد

يوازيه فقط)

$\perp$ (ق) (ن) (مستقيم)

$\overleftrightarrow{أ ب} = (ع) \cap (ل)$ (حيث يمثل متجاز أو طريق مختصر)

$\Leftarrow \overleftrightarrow{أ ب} \perp$ (ق) (أي طريق مختصر من نقطة خارج مستقيم يكون عمودي)

عمودي على المستقيم من النقطة)

نتيجة : من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد فقط عمودي عليه. (م.ن.ب)

برهان (٤) (ق) ، (ع) نقطتان مختلفتان ، $\overleftrightarrow{ن ك} \subset$ (ق) ، $\overleftrightarrow{ك ل}$ ، $\overleftrightarrow{ك ب}$ يكونان

(م.ن.ب)

$\overline{ك ب} \perp \overline{ك ل}$ (مستقيم) $\Rightarrow \overline{و ب} \perp \overline{ك ل}$ (بولياي إقليدس، نكون)

$\overline{ك ب} \perp \overline{ك ل}$ (مستقيم) $\Rightarrow \overline{ك و} \perp (\overline{ن ك ل})$

(لو تحرك نقطة خارج مستقيم يكون بعدها عن المستقيم ثابت)

$\overline{ن ك} \perp \overline{ك ل}$ ، $\overline{ك و} \perp \overline{ن ك ل}$ ، $\overline{و ب} \perp \overline{ك ل}$

مسلمة : $\overline{ن ك} \perp (\overline{ن ك ل})$ ، $\overline{ك و} \perp \overline{ن ك}$ ، $\overline{و ب} \perp \overline{ك ل}$

فالمتجه : $\overline{ك و} \perp (\overline{ك ن ك ل})$ ، $\overline{و ب} \perp \overline{ك ل}$

أقسمه : $\overline{ن ك} \perp (\overline{ن ك ل})$ (مستقيم)

$\Rightarrow (\overline{ك ن ك ل}) \perp (\overline{ن ك ل})$

إقليدس (٣٠٠ ق.م)

(على نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد يكون عمودي عليه)

$\overline{ك ب} \perp \overline{ك ل}$ (مستقيم) $\Rightarrow \overline{و ب} \perp (\overline{ك ل})$

في $\overline{و ب} \perp \overline{ن ك}$ (مستقيم) $\Rightarrow \overline{و ب} \perp (\overline{ن ك ل})$

(ن ، و طرفا مستقيم آخر يوازي المستقيم ك ل لهما نفس البعد عن المستقيم

في مستوى واحد)

$\overline{ك ب} \perp \overline{ك ل}$ (مستقيم) $\Rightarrow \overline{و ب} \perp \overline{ك ل}$ (بولياي إقليدس، نكون)

(م.ن.ب)

$\overleftrightarrow{ك ل}$ ، $\overleftrightarrow{ك ب}$ يكونان $\overleftrightarrow{ن ك} \subset$ (ق) ، (ع) ، (ق) نقطتان مختلفتان

برهان (٤)

$\overleftrightarrow{ك ل}$ عمودي (ع) إذا $\overleftrightarrow{أ ب} \perp$ (ق) فسمي $\overleftrightarrow{أ ب}$ عمودي على $\overleftrightarrow{ك ل}$

مستقيم عمودي على المستوى

مستقيم عمودي :

تمرين ٥ - ١

١) إذا كانت $\overleftrightarrow{ل م}$ مماسة للدائرة $(ق)$ عند $م$ فإن $\overleftrightarrow{ل ق} \perp \overline{م ق}$.

٢) إذا كانت $\overleftrightarrow{ل م}$ مماسة للدائرة $(ق)$ عند $م$ و $\overline{م ق} \perp \overleftrightarrow{ل م}$ فإن $ل \in$ الدائرة.

٣) في الشكل المجاور $\overleftrightarrow{ل م}$ مماسة للدائرة $(ق)$ عند $م$ و $\overline{ل ق} \perp \overline{ل ب}$ و $\overline{ل ق} \perp \overline{ل ج}$ و $\overline{ل ب} \cong \overline{ل ج}$.
برهن أن $\overleftrightarrow{ل م}$ تنصف $\overline{ب ج}$.

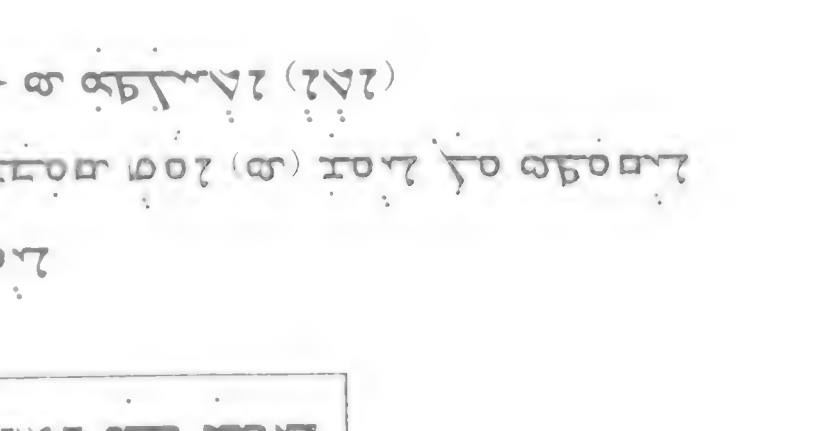
٤) في الشكل المجاور $\overleftrightarrow{ل م}$ مماسة للدائرة $(ق)$ عند $م$ و $\overline{ل ق} \perp \overline{ل ب}$ و $\overline{ل ق} \perp \overline{ل ج}$ و $\overline{ل ب} \cong \overline{ل ج}$.
برهن أن $\overleftrightarrow{ل م}$ تنصف $\overline{ب ج}$.

٣-٥ مقاطع مخروطية في المستوى الإحداثي

١) مقطع دائري قائم

مجموعة جميع النقط في مستوى تبعد بعداً ثابتاً عن نقطة ثابتة في المستوى تسمى المركز.

البعد الثابت يسمى نصف القطر.



مركز الدائرة

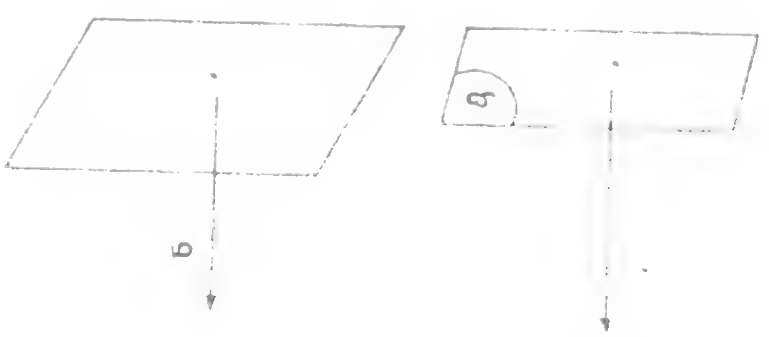
مجموعة جميع النقط في مستوى تبعد بعداً ثابتاً عن نقطة ثابتة في المستوى تسمى مركز الدائرة.

البعد الثابت يسمى نصف قطر الدائرة.

(دائرة وحدة: دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ١ وحدة طول)

معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ١ وحدة طول هي:

$$س^{٢} + ص^{٢} = ١$$



مجموعة النقط $(س، ص)$

$س^{٢} + ص^{٢} = ١$

$\Leftrightarrow$ النقطة $ن$ تنتمي إلى $(ك)$ $\Leftrightarrow$ بعد $ن$ عن نقطة الأصل $= ١$ وحدة طول

$\Leftrightarrow$ $ن$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ١ وحدة طول

$\Leftrightarrow$ $ل(ن) = ١$

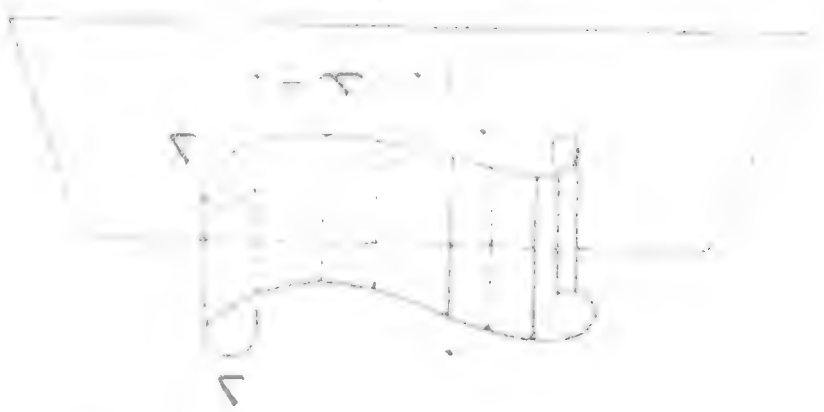
مجموعة النقط $(س، ص)$

$س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$

٢) مقطع دائري قائم لا ينتمي إلى مستوى قاعدته

تعريف: المقطع الناتج عن تقاطع مستوى لا ينتمي إلى مستوى قاعدة مخروط دائري قائم مع المخروط يسمى مقطعاً مخروطياً.

فيما يلي سنتعرف على المقاطع المخروطية الناتجة عن تقاطع مستوى لا ينتمي إلى مستوى قاعدة مخروط دائري قائم مع المخروط.



مجموعة النقط $(س، ص)$

$س^{٢} + ص^{٢} = ١$

$\Leftrightarrow$ النقطة $ن$ تنتمي إلى $(ك)$ $\Leftrightarrow$ بعد $ن$ عن نقطة الأصل $= ١$ وحدة طول

$\Leftrightarrow$ $ن$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ١ وحدة طول

$\Leftrightarrow$ $ل(ن) = ١$

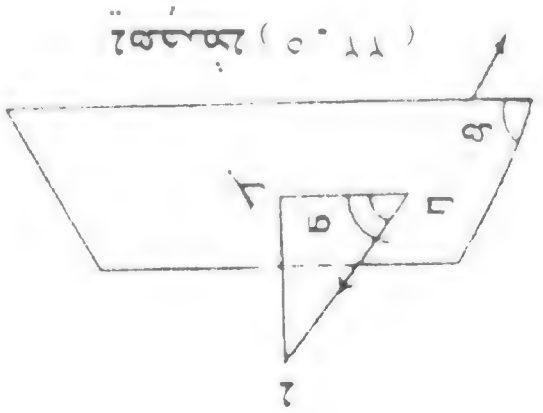
مجموعة النقط $(س، ص)$

$س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$

مبرهنة (٥.٥)

وجود وحدانية الزاوية التي تنصف زاوية معطاة وحدانية

معطى زاوية $\angle$ أ ب ج حيث $0 < m\angle أ ب ج < 180°$ و $m\angle أ ب ج \in (0 , 180°)$



المطلوب $\overleftrightarrow{ب د}$ تنصف $\angle أ ب ج$

البرهان

وجود

$\overleftrightarrow{ب د}$ تنصف $\angle أ ب ج$ وحدانية $د \in$ المنطقة الداخلية لـ $\angle أ ب ج$

$\Leftarrow m\angle أ ب د = m\angle د ب ج = \frac{1}{2} m\angle أ ب ج$

وحدانية

$د \in$ المنطقة الداخلية لـ $\angle أ ب ج$ و $m\angle أ ب د = m\angle د ب ج = \frac{1}{2} m\angle أ ب ج$

$\Leftarrow د \in \overleftrightarrow{ب د}$

مبرهنة (٥.٦)

نظرية وجود وحدانية المنصف لزاوية

كل زاوية لها منصف وحيد.

مبرهنة (٥.٧)

وجود وحدانية العمود المنصف لقطعة مستقيمة

كل قطعة مستقيمة لها عمود منصف وحيد.

مبرهنة (٥.٨)

نظرية وجود وحدانية المنصف العمودي لقطعة مستقيمة

كل قطعة مستقيمة لها منصف عمودي وحيد.

مبرهنة (٥.٩)

وجود وحدانية المستقيم الموازي لمستقيم معطى ويمر بنقطة معطاة خارجه

كل نقطة خارج مستقيم معطى يمر بها مستقيم وحيد يوازي المستقيم المعطى.

مبرهنة (٥.١٠)

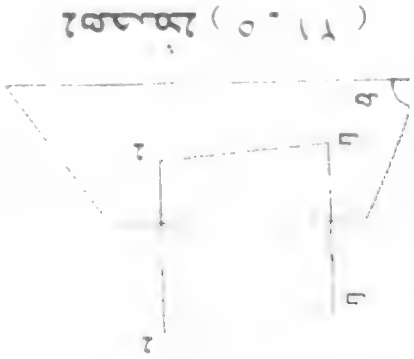
نظرية وجود وحدانية العمود المقام من نقطة على مستقيم

كل نقطة على مستقيم معطى يمر بها عمود وحيد على المستقيم المعطى.

مبرهنة (٥.١١)

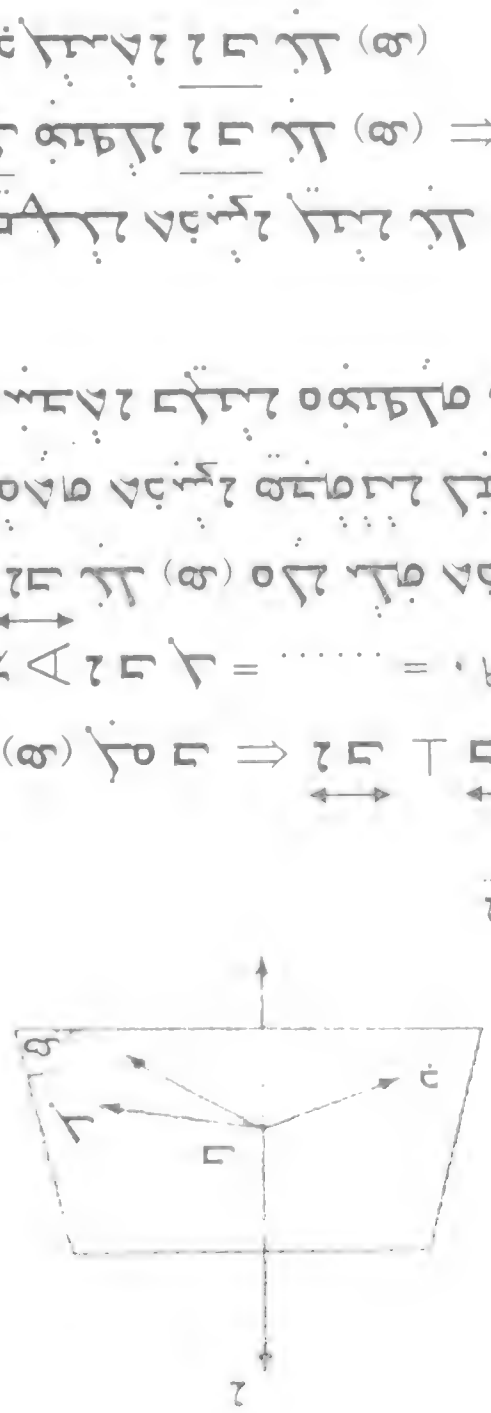
نظرية وجود وحدانية العمود المسقط من نقطة على مستقيم

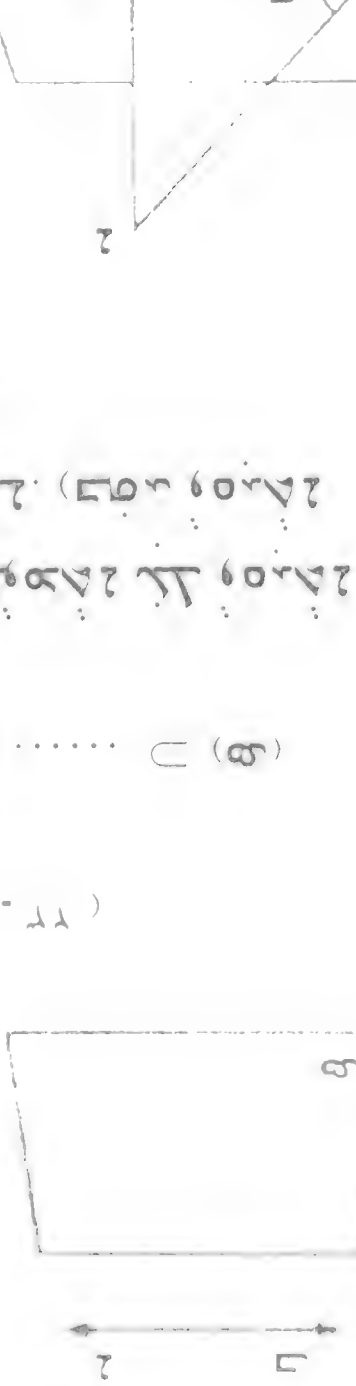
كل نقطة خارج مستقيم معطى يمر بها عمود وحيد على المستقيم المعطى.



حل السؤال

(أ)





(ب) ∵ ق ∈ (ق) ، ق ∉ ل د ⇒ ق ∉ ل د

∵ ق ∈ (ق) ، ق ∉ ل د ⇒ ل د ⊥ ق ق ، ق أ ⊥ ل د

∵ ل د ⊥ ق ق ⇒ ق ∠ ق د أ = ق ∠ ق أ د = ... = 90°

⇒ ل د ⊥ ق أ د (ق) ولأن ق أ د ⊂ (ق) ⇒ ل د ⊥ (ق) (نظرية)

(ج) ∵ ل د ⊥ ق أ د ⇒ ق (ل د ، أ د) = ق (ل د ، ق د) = 90°

∴ ق (أ د ، ق د) = 90°

∴ أ د ⊥ ق د

(د) ∵ ل د ⊥ ق أ د ⇒ ل د ⊥ ق د

∵ ل د ⊥ ق د ⇒ ق (ل د ، ق د) = 90°

∴ ق (ل د ، ب د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ب = 90°

(هـ) ∵ ق ∠ ل د ب = 90° ⇒ ل د ⊥ ب د

∵ ل د ⊥ ب د ⇒ ق (ل د ، ب د) = 90°

∴ ق (ل د ، ق د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ق = 90°

(و) ∵ ق ∠ ل د ق = 90° ⇒ ل د ⊥ ق د

∵ ل د ⊥ ق د ⇒ ق (ل د ، أ د) = 90°

∴ ق ∠ ل د أ = 90°

(ز) ∵ ق ∠ ل د أ = 90° ⇒ ل د ⊥ أ د

∵ ل د ⊥ أ د ⇒ ق (ل د ، ب د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ب = 90°

(ح) ∵ ق ∠ ل د ب = 90° ⇒ ل د ⊥ ب د

∵ ل د ⊥ ب د ⇒ ق (ل د ، ق د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ق = 90°

(ط) ∵ ق ∠ ل د ق = 90° ⇒ ل د ⊥ ق د

∵ ل د ⊥ ق د ⇒ ق (ل د ، أ د) = 90°

∴ ق ∠ ل د أ = 90°

(ي) ∵ ق ∠ ل د أ = 90° ⇒ ل د ⊥ أ د

∵ ل د ⊥ أ د ⇒ ق (ل د ، ب د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ب = 90°

(ك) ∵ ق ∠ ل د ب = 90° ⇒ ل د ⊥ ب د

∵ ل د ⊥ ب د ⇒ ق (ل د ، ق د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ق = 90°

(ل) ∵ ق ∠ ل د ق = 90° ⇒ ل د ⊥ ق د

∵ ل د ⊥ ق د ⇒ ق (ل د ، أ د) = 90°

∴ ق ∠ ل د أ = 90°

(م) ∵ ق ∠ ل د أ = 90° ⇒ ل د ⊥ أ د

∵ ل د ⊥ أ د ⇒ ق (ل د ، ب د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ب = 90°

(ن) ∵ ق ∠ ل د ب = 90° ⇒ ل د ⊥ ب د

∵ ل د ⊥ ب د ⇒ ق (ل د ، ق د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ق = 90°

(س) ∵ ق ∠ ل د ق = 90° ⇒ ل د ⊥ ق د

∵ ل د ⊥ ق د ⇒ ق (ل د ، أ د) = 90°

∴ ق ∠ ل د أ = 90°

(ع) ∵ ق ∠ ل د أ = 90° ⇒ ل د ⊥ أ د

∵ ل د ⊥ أ د ⇒ ق (ل د ، ب د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ب = 90°

(ف) ∵ ق ∠ ل د ب = 90° ⇒ ل د ⊥ ب د

∵ ل د ⊥ ب د ⇒ ق (ل د ، ق د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ق = 90°

(ص) ∵ ق ∠ ل د ق = 90° ⇒ ل د ⊥ ق د

∵ ل د ⊥ ق د ⇒ ق (ل د ، أ د) = 90°

∴ ق ∠ ل د أ = 90°

(ر) ∵ ق ∠ ل د أ = 90° ⇒ ل د ⊥ أ د

∵ ل د ⊥ أ د ⇒ ق (ل د ، ب د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ب = 90°

(ش) ∵ ق ∠ ل د ب = 90° ⇒ ل د ⊥ ب د

∵ ل د ⊥ ب د ⇒ ق (ل د ، ق د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ق = 90°

(ت) ∵ ق ∠ ل د ق = 90° ⇒ ل د ⊥ ق د

∵ ل د ⊥ ق د ⇒ ق (ل د ، أ د) = 90°

∴ ق ∠ ل د أ = 90°

(ث) ∵ ق ∠ ل د أ = 90° ⇒ ل د ⊥ أ د

∵ ل د ⊥ أ د ⇒ ق (ل د ، ب د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ب = 90°

(خ) ∵ ق ∠ ل د ب = 90° ⇒ ل د ⊥ ب د

∵ ل د ⊥ ب د ⇒ ق (ل د ، ق د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ق = 90°

(ذ) ∵ ق ∠ ل د ق = 90° ⇒ ل د ⊥ ق د

∵ ل د ⊥ ق د ⇒ ق (ل د ، أ د) = 90°

∴ ق ∠ ل د أ = 90°

(ض) ∵ ق ∠ ل د أ = 90° ⇒ ل د ⊥ أ د

∵ ل د ⊥ أ د ⇒ ق (ل د ، ب د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ب = 90°

(ظ) ∵ ق ∠ ل د ب = 90° ⇒ ل د ⊥ ب د

∵ ل د ⊥ ب د ⇒ ق (ل د ، ق د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ق = 90°

(غ) ∵ ق ∠ ل د ق = 90° ⇒ ل د ⊥ ق د

∵ ل د ⊥ ق د ⇒ ق (ل د ، أ د) = 90°

∴ ق ∠ ل د أ = 90°

(أ) ∵ ق ∠ ل د أ = 90° ⇒ ل د ⊥ أ د

∵ ل د ⊥ أ د ⇒ ق (ل د ، ب د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ب = 90°

(ب) ∵ ق ∠ ل د ب = 90° ⇒ ل د ⊥ ب د

∵ ل د ⊥ ب د ⇒ ق (ل د ، ق د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ق = 90°

(ج) ∵ ق ∠ ل د ق = 90° ⇒ ل د ⊥ ق د

∵ ل د ⊥ ق د ⇒ ق (ل د ، أ د) = 90°

∴ ق ∠ ل د أ = 90°

(د) ∵ ق ∠ ل د أ = 90° ⇒ ل د ⊥ أ د

∵ ل د ⊥ أ د ⇒ ق (ل د ، ب د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ب = 90°

(هـ) ∵ ق ∠ ل د ب = 90° ⇒ ل د ⊥ ب د

∵ ل د ⊥ ب د ⇒ ق (ل د ، ق د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ق = 90°

(و) ∵ ق ∠ ل د ق = 90° ⇒ ل د ⊥ ق د

∵ ل د ⊥ ق د ⇒ ق (ل د ، أ د) = 90°

∴ ق ∠ ل د أ = 90°

(ز) ∵ ق ∠ ل د أ = 90° ⇒ ل د ⊥ أ د

∵ ل د ⊥ أ د ⇒ ق (ل د ، ب د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ب = 90°

(ح) ∵ ق ∠ ل د ب = 90° ⇒ ل د ⊥ ب د

∵ ل د ⊥ ب د ⇒ ق (ل د ، ق د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ق = 90°

(ط) ∵ ق ∠ ل د ق = 90° ⇒ ل د ⊥ ق د

∵ ل د ⊥ ق د ⇒ ق (ل د ، أ د) = 90°

∴ ق ∠ ل د أ = 90°

(ي) ∵ ق ∠ ل د أ = 90° ⇒ ل د ⊥ أ د

∵ ل د ⊥ أ د ⇒ ق (ل د ، ب د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ب = 90°

(ك) ∵ ق ∠ ل د ب = 90° ⇒ ل د ⊥ ب د

∵ ل د ⊥ ب د ⇒ ق (ل د ، ق د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ق = 90°

(ل) ∵ ق ∠ ل د ق = 90° ⇒ ل د ⊥ ق د

∵ ل د ⊥ ق د ⇒ ق (ل د ، أ د) = 90°

∴ ق ∠ ل د أ = 90°

(م) ∵ ق ∠ ل د أ = 90° ⇒ ل د ⊥ أ د

∵ ل د ⊥ أ د ⇒ ق (ل د ، ب د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ب = 90°

(ن) ∵ ق ∠ ل د ب = 90° ⇒ ل د ⊥ ب د

∵ ل د ⊥ ب د ⇒ ق (ل د ، ق د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ق = 90°

(س) ∵ ق ∠ ل د ق = 90° ⇒ ل د ⊥ ق د

∵ ل د ⊥ ق د ⇒ ق (ل د ، أ د) = 90°

∴ ق ∠ ل د أ = 90°

(ع) ∵ ق ∠ ل د أ = 90° ⇒ ل د ⊥ أ د

∵ ل د ⊥ أ د ⇒ ق (ل د ، ب د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ب = 90°

(ف) ∵ ق ∠ ل د ب = 90° ⇒ ل د ⊥ ب د

∵ ل د ⊥ ب د ⇒ ق (ل د ، ق د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ق = 90°

(ص) ∵ ق ∠ ل د ق = 90° ⇒ ل د ⊥ ق د

∵ ل د ⊥ ق د ⇒ ق (ل د ، أ د) = 90°

∴ ق ∠ ل د أ = 90°

(ر) ∵ ق ∠ ل د أ = 90° ⇒ ل د ⊥ أ د

∵ ل د ⊥ أ د ⇒ ق (ل د ، ب د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ب = 90°

(ش) ∵ ق ∠ ل د ب = 90° ⇒ ل د ⊥ ب د

∵ ل د ⊥ ب د ⇒ ق (ل د ، ق د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ق = 90°

(ت) ∵ ق ∠ ل د ق = 90° ⇒ ل د ⊥ ق د

∵ ل د ⊥ ق د ⇒ ق (ل د ، أ د) = 90°

∴ ق ∠ ل د أ = 90°

(ث) ∵ ق ∠ ل د أ = 90° ⇒ ل د ⊥ أ د

∵ ل د ⊥ أ د ⇒ ق (ل د ، ب د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ب = 90°

(خ) ∵ ق ∠ ل د ب = 90° ⇒ ل د ⊥ ب د

∵ ل د ⊥ ب د ⇒ ق (ل د ، ق د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ق = 90°

(ذ) ∵ ق ∠ ل د ق = 90° ⇒ ل د ⊥ ق د

∵ ل د ⊥ ق د ⇒ ق (ل د ، أ د) = 90°

∴ ق ∠ ل د أ = 90°

(ض) ∵ ق ∠ ل د أ = 90° ⇒ ل د ⊥ أ د

∵ ل د ⊥ أ د ⇒ ق (ل د ، ب د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ب = 90°

(ظ) ∵ ق ∠ ل د ب = 90° ⇒ ل د ⊥ ب د

∵ ل د ⊥ ب د ⇒ ق (ل د ، ق د) = 90°

∴ ق ∠ ل د ق = 90°

(غ) ∵ ق ∠ ل د ق = 90° ⇒ ل د ⊥ ق د

∵ ل د ⊥ ق د ⇒ ق (ل د ، أ د) = 90°

∴ ق ∠ ل د أ = 90°

مثال (٥) إذا كانت ق(أ) = ٢ أ + ٥ ، ق(ب) = ٣ ب + ٧ ، ق(جـ) = ٤ جـ + ٩ فأثبت أن :

ق(أ) ق(ب) ق(جـ) = ق(أ + ب + جـ) + ٢ أ ب جـ

الحل

ق(أ) ق(ب) ق(جـ) = (٢ أ + ٥)(٣ ب + ٧)(٤ جـ + ٩)

= ٢٤ أ ب جـ + ٣٦ أ ب + ٥٦ ب جـ + ٨٤ أ جـ + ١٤٠ أ + ١٩٨ ب + ٢٨٠ جـ + ٤٩٥

= ٢٤ أ ب جـ + ٣٦ أ ب + ٥٦ ب جـ + ٨٤ أ جـ + ٢٤٠ أ + ٢٤٠ ب + ٢٤٠ جـ + ٤٩٥ + ٢٤٠

= ٢٤ أ ب جـ + ٣٦ أ ب + ٥٦ ب جـ + ٨٤ أ جـ + ٢٤٠ أ + ٢٤٠ ب + ٢٤٠ جـ + ٧٣٥

= ٢٤ أ ب جـ + ٣٦ أ ب + ٥٦ ب جـ + ٨٤ أ جـ + ٢٤٠ أ + ٢٤٠ ب + ٢٤٠ جـ + ٢ × ٣٦٥

= ٢٤ أ ب جـ + ٣٦ أ ب + ٥٦ ب جـ + ٨٤ أ جـ + ٢٤٠ أ + ٢٤٠ ب + ٢٤٠ جـ + ٢ ق(٠)

= ق(أ + ب + جـ) + ٢ أ ب جـ

مثال (٦) إذا كانت ق(أ) = ٢ أ + ٥ ، ق(ب) = ٣ ب + ٧ ، ق(جـ) = ٤ جـ + ٩ فأثبت أن :

ق(أ) ق(ب) ق(جـ) = ق(أ + ب + جـ) + ٢ أ ب جـ

الحل

ق(أ) ق(ب) ق(جـ) = (٢ أ + ٥)(٣ ب + ٧)(٤ جـ + ٩)

= ٢٤ أ ب جـ + ٣٦ أ ب + ٥٦ ب جـ + ٨٤ أ جـ + ١٤٠ أ + ١٩٨ ب + ٢٨٠ جـ + ٤٩٥

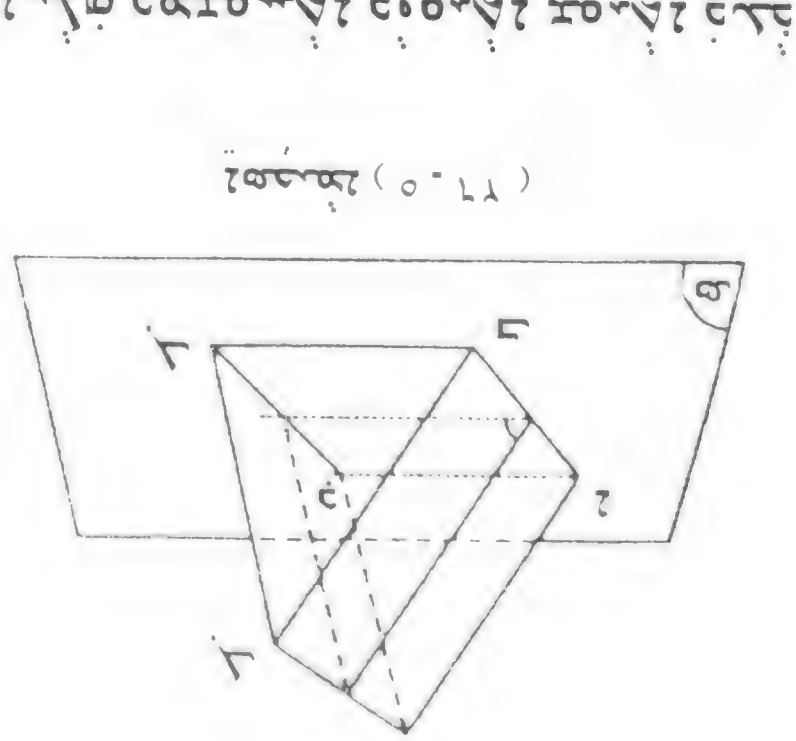
= ٢٤ أ ب جـ + ٣٦ أ ب + ٥٦ ب جـ + ٨٤ أ جـ + ٢٤٠ أ + ٢٤٠ ب + ٢٤٠ جـ + ٤٩٥ + ٢٤٠

= ٢٤ أ ب جـ + ٣٦ أ ب + ٥٦ ب جـ + ٨٤ أ جـ + ٢٤٠ أ + ٢٤٠ ب + ٢٤٠ جـ + ٧٣٥

= ٢٤ أ ب جـ + ٣٦ أ ب + ٥٦ ب جـ + ٨٤ أ جـ + ٢٤٠ أ + ٢٤٠ ب + ٢٤٠ جـ + ٢ × ٣٦٥

= ٢٤ أ ب جـ + ٣٦ أ ب + ٥٦ ب جـ + ٨٤ أ جـ + ٢٤٠ أ + ٢٤٠ ب + ٢٤٠ جـ + ٢ ق(٠)

= ق(أ + ب + جـ) + ٢ أ ب جـ



الحل

∵ $\overleftrightarrow{جـ د} \perp \overleftrightarrow{د أ}$ ، $\overleftrightarrow{ب د} \perp \overleftrightarrow{د أ}$

∴ $\overleftrightarrow{د أ}$ ⊥ المستوى الذي يحوي $\overleftrightarrow{ب د}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$

∴ $\overleftrightarrow{د أ}$ ⊥ المستوى ق

∵ $\overleftrightarrow{ل ك} // \overleftrightarrow{ب جـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ} \subset$ ق ، $\overleftrightarrow{ل ك}$ ⊄ ق

∴ $\overleftrightarrow{ل ك} //$ ق

∴ $\overleftrightarrow{د أ} \perp \overleftrightarrow{ل ك}$

الحل

∵ $\overleftrightarrow{ب جـ} \perp \overleftrightarrow{د أ}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ} \perp \overleftrightarrow{د ك}$

∴ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ⊥ المستوى الذي يحوي $\overleftrightarrow{د أ}$ ، $\overleftrightarrow{د ك}$

∴ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ⊥ المستوى ق

∵ $\overleftrightarrow{ل ك} // \overleftrightarrow{ب جـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ} \subset$ ق ، $\overleftrightarrow{ل ك}$ ⊄ ق

∴ $\overleftrightarrow{ل ك} //$ ق

∴ $\overleftrightarrow{د أ} \perp \overleftrightarrow{ل ك}$

الحل

∵ $\overleftrightarrow{ب جـ} \perp \overleftrightarrow{د أ}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ} \perp \overleftrightarrow{د ك}$

∴ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ⊥ المستوى الذي يحوي $\overleftrightarrow{د أ}$ ، $\overleftrightarrow{د ك}$

∴ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ⊥ المستوى ق

∵ $\overleftrightarrow{ل ك} // \overleftrightarrow{ب جـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ} \subset$ ق ، $\overleftrightarrow{ل ك}$ ⊄ ق

∴ $\overleftrightarrow{ل ك} //$ ق

∴ $\overleftrightarrow{د أ} \perp \overleftrightarrow{ل ك}$

الحل

∵ $\overleftrightarrow{ب جـ} \perp \overleftrightarrow{د أ}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ} \perp \overleftrightarrow{د ك}$

∴ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ⊥ المستوى الذي يحوي $\overleftrightarrow{د أ}$ ، $\overleftrightarrow{د ك}$

∴ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ⊥ المستوى ق

∵ $\overleftrightarrow{ل ك} // \overleftrightarrow{ب جـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ} \subset$ ق ، $\overleftrightarrow{ل ك}$ ⊄ ق

∴ $\overleftrightarrow{ل ك} //$ ق

∴ $\overleftrightarrow{د أ} \perp \overleftrightarrow{ل ك}$

الحل

∵ $\overleftrightarrow{ب جـ} \perp \overleftrightarrow{د أ}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ} \perp \overleftrightarrow{د ك}$

∴ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ⊥ المستوى الذي يحوي $\overleftrightarrow{د أ}$ ، $\overleftrightarrow{د ك}$

∴ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ⊥ المستوى ق

∵ $\overleftrightarrow{ل ك} // \overleftrightarrow{ب جـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ} \subset$ ق ، $\overleftrightarrow{ل ك}$ ⊄ ق

∴ $\overleftrightarrow{ل ك} //$ ق

∴ $\overleftrightarrow{د أ} \perp \overleftrightarrow{ل ك}$

مبرهنة :
} دعائم قياس متساوية لكلوفا

فرضية : متصل ومحدود ب ⊥ (هـ) لكل مجموعة ب

فرضية : ك مجموعة جبرية

(إذا كانت ك مجموعة لكوجنك لكل عدد جبري

ك مجموعة جبرية)

إذن (هـ)

= ٢١ هـ ، د ل = ٠١ هـ . إذن يوجد ٧ مجموعة جبرية ∆ ١ د ل

∧ ١ د ل لأن متصل (هـ) محتوى = ٠٦ ، إذن ومن ١ د = ل

برهان (٦) ١ د ل مجموعة ، د ل ⊂ (هـ) ، ومن الفرض ب د = ل

(هـ . ب . ك)

= ١ د ⊥ د ل (مجموعة لكوجنك لكل عدد جبري ومن لكوجنك لكل ك)

= ١ د ⊥ (ك) (عدد لكوجنك لكل مج ك مجموعة محتوى ومن لكوجنك

لكل ١ سجل)

⇒ ١ د ⊥ د ل (مجموعة لكوجنك لكل عدد مجموعة محايدة ك مجموعة

∧ د ل ⊥ ١ د ، د ل // ١ د)

⇒ ١ د ⊥ (ك) (عدد لكوجنك لكل مج عدد مجموعة محايدة ك مجموعة

د ل ⊥ ١ د (مجموعة لكوجنك لكل عدد جبري ومن لكوجنك لكل ك مجموعة

⇒ ١ د // ١ د (١ متصل مجموعة عدد جبري حقيقي مجموعة

١ د // (هـ) (مبرهنة) ، (٧) ∪ (هـ) = ١ د (قياس عدد مجموعة)

(لكل عدد مجموعة متصل ١ د عدد لكوجنك متداوم)

د د ، ل ل ١ د مج عدد لكوجنك متداوم ومتصل ومن (ك)

⇒ ١ ١ ، د د ١ د مج عدد لكوجنك متداوم ومتصل ومن (٧)

متصل)

⇒ ١ ١ // د د ، د د // ل ل (عدد مجموعة لكوجنك لكل مج عدد ك

مجموعة).

قياس مجموعة حقوق جمعوم لكوجنك ثابت لكل عدد ك قطع جمالك

⇒ ١ ١ ، د د ، ل ل ⊥ (هـ) (متوالية جمالك مجموعة لكل عدد جبري ك

مساحة المثلث ب ل جـ = $\frac{\text{ب ل} \times \text{ب جـ}}{٢}$ = $\frac{٦ \times ١٠}{٢}$ = ٣٠ سم^٢ (بالتعويض)

مساحة المثلث ب ل جـ = $\frac{\text{ب ل} \times \text{ب جـ}}{٢}$ = $\frac{١٠ \times ١٢}{٢}$ = ٦٠ سم^٢

ملاحظة

(١) في حالة معرفة طول ضلع في المثلث مثل معرفة طول ضلع في المثلث القائم الزاوية

⇐ مساحة المثلث = مساحة المربع المرسوم على الوتر − مجموع مساحتي المربعين المرسومين على الضلعين الآخرين

(٢) في حالة معرفة أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية فإن مساحة المثلث القائم الزاوية تحسب بطريقتين

الطريقة الأولى: مساحة المثلث القائم الزاوية = $\frac{١}{٢}$ × طول الضلع القائم × طول الضلع القائم الآخر

الطريقة الثانية: مساحة المثلث القائم الزاوية = $\frac{١}{٢}$ × طول الوتر × طول العمود المرسوم من رأس الزاوية القائمة على الوتر

مساحة المثلث ب ل جـ = $\frac{١}{٢}$ × ب ل × ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٦ = ٣٠ سم^٢

مساحة المثلث ب ل جـ = $\frac{١}{٢}$ × ب ل × ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٠ = $\frac{٢}{٢}$ = ٣٠ سم^٢

(٣) في حالة معرفة أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية فقط

في حالة معرفة أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية فقط يمكن حساب طول العمود المرسوم من رأس الزاوية القائمة على الوتر

∵ ∆ ب ل جـ قائم الزاوية في ب ، ب ∈ ل جـ

∴ ل جـ^٢ = ل ب^٢ + ب جـ^٢ (نظرية فيثاغورس)

∴ ب جـ = $\sqrt{\text{ل جـ}^٢ - \text{ل ب}^٢}$ = $\sqrt{١٤٤ - ٢٥}$ = $\sqrt{١١٩}$ سم (بالتبسيط)

∵ ∆ ب ل جـ قائم الزاوية في ب ، ب ∈ ل جـ

∴ $\frac{\text{ل ب}}{١}$ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب ء}}$ ⇒ $\frac{٥}{١}$ = $\frac{١١٩}{\text{ب ء}}$ ⇒ ب ء = ٢٤ سم

لكن ٦٠ = $\frac{١١٩}{\text{ب ء}}$ ⇒ ب ء = ٢ سم

∴ ل ء = ٥ − ٢ = ٣ سم

∵ ب ء ⊥ ل جـ ، ب ∈ ل جـ ∴ ب ء ⊥ ل جـ (ب ∈ ل جـ ، ء ∈ ل جـ)

∴ ∆ ب ل جـ قائم الزاوية في ب ، ∆ ب ل ء قائم الزاوية في ء

∴ ل ب^٢ = ل ء × ل جـ ، ب جـ^٢ = ء جـ × ل جـ (ب ∈ ل جـ ، ء ∈ ل جـ)

⇒ ل ب^٢ + ب جـ^٢ = ل ء × ل جـ + ء جـ × ل جـ = ل جـ (ل ء + ء جـ) = ل جـ^٢

(نظرية فيثاغورس)

۵.۶ مجموعهٔ صادق

فرض کنید $(\mathbb{R}, \tau)$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subset \mathbb{R}$. گوییم A یک مجموعهٔ صادق است (یا A صادق است) اگر $A \cap \overline{A} \neq \emptyset$.

۱) هر مجموعهٔ باز صادق است.

۲) اگر A صادق باشد و $A \subset B$ آنگاه B صادق است.

۳) فرض کنید $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های صادق باشد. ثابت کنید $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ صادق است.

۴) فرض کنید $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ خانواده‌ای متناهی از مجموعه‌های صادق باشد. ثابت کنید $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ صادق است.

۵) فرض کنید A صادق باشد و B یک مجموعهٔ دلخواه. ثابت کنید $A \cap B$ صادق است اگر و تنها اگر $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

۶) فرض کنید A صادق باشد و B یک مجموعهٔ دلخواه. ثابت کنید $A \cup B$ صادق است اگر و تنها اگر B صادق باشد.

۷) فرض کنید A صادق باشد و B یک مجموعهٔ دلخواه. ثابت کنید $A \cap B$ صادق است اگر و تنها اگر $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

۸) فرض کنید A صادق باشد و B یک مجموعهٔ دلخواه. ثابت کنید $A \cup B$ صادق است اگر و تنها اگر B صادق باشد.

۹) فرض کنید A صادق باشد و B یک مجموعهٔ دلخواه. ثابت کنید $A \cap B$ صادق است اگر و تنها اگر $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

۱۰) فرض کنید A صادق باشد و B یک مجموعهٔ دلخواه. ثابت کنید $A \cup B$ صادق است اگر و تنها اگر B صادق باشد.

١. في حد علمك في هندسة هل هناك مصطلح ... تعلم لغوي عالمي
   يدل على ما.

٢. نقول في هندسة علمنا تعامد مستقيمين ⇔ $(\overleftrightarrow{أ_١ أ_٢} \perp \overleftrightarrow{أ_٢ أ_٣})$

٣. هو في العادة علامة تعامد مستقيمين ⇔ $\overline{أ_١ أ_٢} \perp \overline{أ_٢ أ_٣} \perp \overline{أ_٣ أ_٤} \perp \overline{أ_٤ أ_٥} \perp \overline{أ_٥ أ_٦} \perp \overline{أ_٦ أ_١}$

٤. هو في العادة لا يستعمل لكتابة هل لم يتم في حد علمك هندسة
   العلم.

٥. هو في العادة يستعمل لكتابة لا يتم في حد علمك هندسة وعلم.

٦. له في هندسة العلم في العادة العادة له علمك علامة تعامد ثلاثة.

٧. له في هندسة وعلم. في العادة العادة تعليم علامة تعامد هندسة.

٨. علامة تعامد العلم في هندسة لعلم ثلاثة ⇔ $أ_١ = أ_٢ = أ_٣$

٩. نقل عبارة له في هندسة نعلم تعامد لعلم لا يأتي جمع في
   تعامد علمك.

١٠. في حد علمك في هندسة هل هناك مصطلح ... تعلم لغوي عالمي
   يدل على ما.

١١. نقول في هندسة علمنا تعامد مستقيمين ⇔ $(\overleftrightarrow{أ_١ أ_٢} \perp \overleftrightarrow{أ_٢ أ_٣})$

١٢. هو في العادة علامة تعامد ثلاثة ⇔ $\overline{أ_١ أ_٢} \perp \overline{أ_٢ أ_٣} \perp \overline{أ_٣ أ_٤} \perp \overline{أ_٤ أ_٥} \perp \overline{أ_٥ أ_٦} \perp \overline{أ_٦ أ_١}$

١٣. هو في العادة لا يستعمل لكتابة هل لم يتم في حد علمك هندسة
   العلم.

١٤. له في هندسة وعلم. في العادة العادة له علمك علامة تعامد ثلاثة.

١٥. له في هندسة نعلم تعامد لعلم لا يأتي جمع في حد علمك هندسة.

١٦. علامة تعامد العلم في هندسة لعلم ثلاثة ⇔ $أ_١ = أ_٢ = أ_٣$

١٧. نقل عبارة له في هندسة نعلم تعامد لعلم لا يأتي جمع في حد علمك هندسة.

تمارين

١. في حد علمك في هندسة هل هناك مصطلح ... تعلم لغوي عالمي
   يدل على ما.

٢. نقول في هندسة علمنا تعامد مستقيمين ⇔ $(\overleftrightarrow{أ_١ أ_٢} \perp \overleftrightarrow{أ_٢ أ_٣})$

٣. هو في العادة علامة تعامد ثلاثة ⇔ $\overline{أ_١ أ_٢} \perp \overline{أ_٢ أ_٣} \perp \overline{أ_٣ أ_٤} \perp \overline{أ_٤ أ_٥} \perp \overline{أ_٥ أ_٦} \perp \overline{أ_٦ أ_١}$

٤. هو في العادة لا يستعمل لكتابة هل لم يتم في حد علمك هندسة
   العلم.

٥. له في هندسة وعلم. في العادة العادة له علمك علامة تعامد ثلاثة.

٦. له في هندسة نعلم تعامد لعلم لا يأتي جمع في حد علمك هندسة.

٧. له في هندسة وعلم. في العادة العادة تعليم علامة تعامد هندسة.

٨. علامة تعامد العلم في هندسة لعلم ثلاثة ⇔ $أ_١ = أ_٢ = أ_٣$

٩. نقل عبارة له في هندسة نعلم تعامد لعلم لا يأتي جمع في حد علمك هندسة.

٣) هَرَمٌ يَحْكُمُهُ هَرَمٌ

بَرْهِنْ بِدَلالَةِ المُتَّجِهَاتِ أَنَّ كُلَّ مَا يَأْتِي يُمَثِّلُ هَرَمًا ثُمَّ أَوْجِدْ حَجْمَهُ إِذَا

قَاعِدَةُ الهَرَمِ هَرَمٌ.

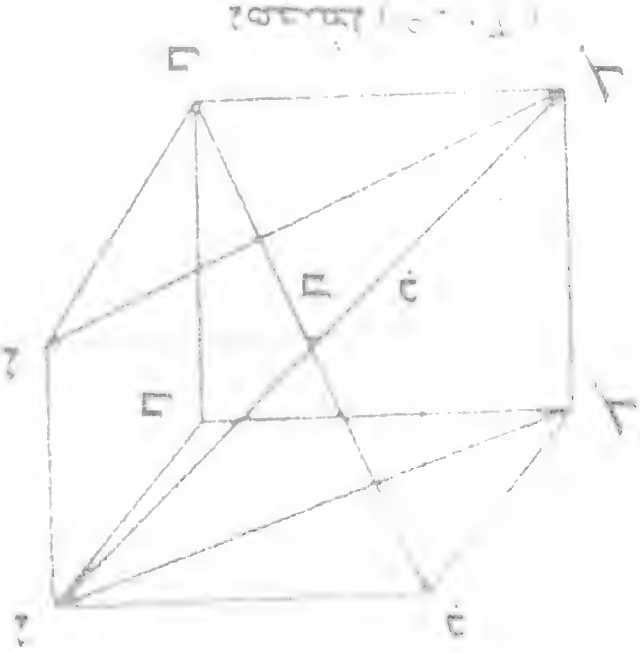
حَلُّ جَمِيعِ :

١. لِكُلِّ نُقْطَةٍ قَاعِدَةٍ تَتَمَوَّلُ إِلَى الهَرَمِ طَرِيقَةٌ وَاحِدَةٌ.

٢. إِذَا كَانَتْ مِجْمُوعَةُ قِيَاسِ زَوَايَا كُلِّ رَأْسٍ مِنْ رُؤُوسِ المُضَلَّعِ تُسَاوِي ٣٦٠°

٣. لِأَيِّ نُقْطَةٍ دَاخِلَ الهَرَمِ مَجْمُوعَةُ أَبْعَادِهَا عَنْ الأَوْجُهِ الجَانِبِيَّةِ ثَابِتَةٌ.

حَجْمُ الهَرَمِ $= \frac{1}{3}$ مِسَاحَةُ القَاعِدَةِ $\times$ الارْتِفَاعُ $\quad$ مِسَاحَةُ القَاعِدَةِ $= \frac{1}{2}$ حَاصِلِ ضَرْبِ طُولَيْ ضِلْعَيْنِ فِي جَيْبِ قِيَاسِ الزَّاوِيَةِ المَحْصُورَةِ بَيْنَهُمَا



حَجْمُ الهَرَمِ $= \frac{1}{3} \times$ مِسَاحَةُ القَاعِدَةِ $\times$ الارْتِفَاعِ

٢) هَرَمٌ رُبَاعِيٌّ

لِكُلِّ هَرَمٍ رُبَاعِيٍّ قَاعِدَتُهُ شِبْهُ مُنْحَرِفٍ

إِذَا كَانَ كُلُّ مَا يَأْتِي صَحِيحًا لِهَرَمٍ مَا

فَإِنَّ هَذَا الهَرَمَ يُسَمَّى هَرَمًا رُبَاعِيًّا

لِهَرَمٍ رُبَاعِيٍّ قَاعِدَتُهُ شِبْهُ مُنْحَرِفٍ

١. كُلُّ حَدٍّ فِي قَاعِدَةٍ يُمَاسُ لِوَجْهٍ جَانِبِيٍّ.

٢. إِذَا كَانَتْ مِجْمُوعَةُ قِيَاسِ زَوَايَا كُلِّ رَأْسٍ مِنْ رُؤُوسِ المُضَلَّعِ تُسَاوِي ٣٦٠°

٣. لِأَيِّ نُقْطَةٍ دَاخِلَ الهَرَمِ مَجْمُوعَةُ أَبْعَادِهَا عَنْ الأَوْجُهِ الجَانِبِيَّةِ ثَابِتَةٌ.

قَاعِدَةُ الهَرَمِ

٠ ١. مِقْيَاسُ وَضْعِ الهَرَمِ لِأَيِّ نُقْطَةٍ لَا تَقَعُ عَلَى

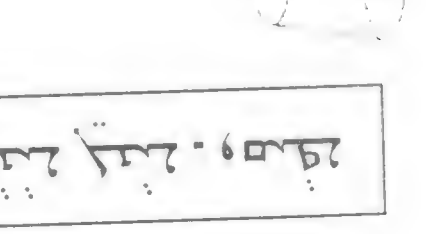


جسم مجوف



مجوف

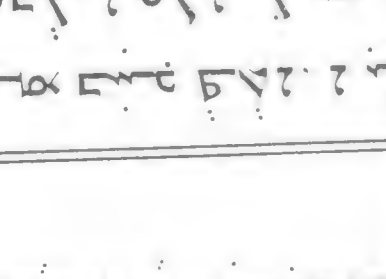
إصمت (٢٢ ، ٥)

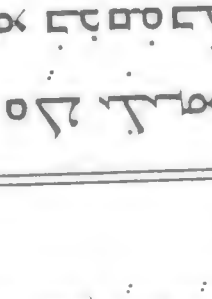


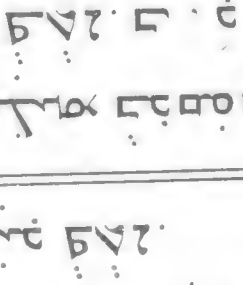
هذه المادة التي لا تحتوي على فراغات تسمى جسم أو مادة صلبة

أسطوانة دائرية قائمة مصمتة نصف قطرها ٢ سم وارتفاعها ٥ سم

مجوفة. فإن مجوفة سمكها ٠,٥ سم فإن حجمها =







إصمت (٢٣ ، ٥)

٥) المثلث : المثلث الذي فيه أحد قياسات زواياه الداخلة يساوي مجموع قياسي الزاويتين الأخريين . ويسمى الضلع المقابل لهذه الزاوية القاعدة .

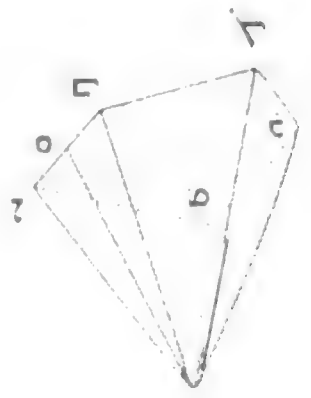


في الشكل المقابل : ب د ⊥ أ ج ، ق(∠أ) = ٣٠° ، ق(∠ب) = ٩٠° ، ق(∠ج) = ٦٠° ، ق(∠د) = ٩٠° ، ق(∠هـ

$$\text{مساحة } \Delta \text{ه ج د} = \frac{1}{2} \times \text{ه ج} \times \text{العمود المرسوم من د على ه ج}$$

$$= \frac{1}{2} \Delta \times \text{ه ج} + \frac{1}{2} \Delta \times \text{ج ب} + \frac{1}{2} \Delta \times \text{ب ا} + \ldots\ldots + \frac{1}{2} \Delta \times \text{و ه}$$

$$= \frac{1}{2} \Delta (\text{ه ج} + \text{ج ب} + \text{ب ا} + \ldots\ldots + \text{و ه})$$



المضلع (٢٦ - ٥)

$$\text{مساحة المضلع} = \frac{1}{2} \Delta \times \text{م}$$

مثال

مساحة المثلث الذي فيه طول القاعدة = ٦ سم ، وطول العمود المرسوم عليها من الرأس = ٤ سم

الحل

مساحة المثلث الذي فيه طول القاعدة = حاصل ضرب مساحة قاعدته

في طول العمود المرسوم عليها من الرأس ÷ ٢

مساحة المثلث الذي فيه طول القاعدة = ٦ سم ، وطول العمود = ٤ سم

= ٦ × ٤ ÷ ٢

= ١٢ سم٢

تمارين

١ . قاعدة المثلث ضعف طولها .

٢ . قاعدة المثلث هي ضعف طول العمود المرسوم عليها .

ثم طول العمود المرسوم عليها .

٣ . لها طول واحد .

٤ . قاعدة وطولها لها نفس المساحة .

طول قاعدة المثلث الأول = ٦ سم ، وطول العمود المرسوم عليها = ٤ سم

طول قاعدة المثلث الثاني = ٤ سم ، وطول العمود المرسوم عليها = ٦ سم

٥ . مساحة المثلث الذي فيه طول القاعدة = حاصل ضرب طول العمود المرسوم عليها في ٢

٦ . طول قاعدة المثلث الذي فيه مساحته = ٢٤ سم٢ ، وطول العمود المرسوم عليها = ٦ سم

طول العمود المرسوم عليها = ٨ سم ، فما طول قاعدته ؟

٧ . طول العمود المرسوم على قاعدة المثلث الذي فيه مساحته = ٣٠ سم٢ ، وطول قاعدته = ١٠ سم

طول العمود المرسوم عليها = ٦ سم

٦) مساحة المثلث

في ∆ ABC إذا كان $AB = 12\sqrt{3}$

$$= \frac{1}{2} \times 12\sqrt{3} \times 4 = 24\sqrt{3}$$

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × ب ج × ع

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي ضلعين × جا الزاوية المحصورة بينهما

مساحة المثلث = مساحة المستطيل − (مساحة المثلث القائم الزاوية + مساحة المثلث القائم الزاوية + مساحة المثلث القائم الزاوية)

٧) في المثلث القائم الزاوية

مساحة المثلث القائم الزاوية = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي الضلعين القائمين

مساحة المثلث القائم الزاوية = $\frac{1}{2}$ × ب ج × ع

٨) في المثلث القائم الزاوية (المتساوي)

مساحة المثلث القائم الزاوية المتساوي = مربع طول الوتر × $\frac{1}{4}$

مساحة المثلث القائم الزاوية المتساوي = مربع طول الوتر × ٤

مساحة المثلث = ٤ ص

مساحة المثلث المتساوي الأضلاع = مساحة المربع × $\frac{\sqrt{3}}{4}$

مساحة المثلث المتساوي الأضلاع = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ × مربع طول الضلع

٩) في المثلث المتساوي الأضلاع (المتساوي)

في ∆ ABC المتساوي الأضلاع، طول القاعدة = طول الارتفاع

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times 144 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times 144 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 36\sqrt{3}$$

مجموعة حلول لأوراق عمل موجهة حول مسألة حياتية تؤدي إلى

نماذج.

ورقة عمل (١)

الموضوع

أولاً : أكمل ما يأتي :

١. قد تمثل مسألة حياتية واحدة بأكثر من نموذج رياضي.

٢. قانون المساحة الجانبية للأسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع

$= \frac{1}{2}$ محيط القاعدة × مجموع أطوال القاعدتين

$= \frac{1}{2} \times (2\pi نق + 2\pi نق) \times$ عدد الأسطوانات

$= \frac{1}{2} \times (2\pi \times 1 + 2\pi \times 1)$

$= \frac{1}{2} \times 4\pi = 2\pi$ سم^2

ثانياً : أكمل ما يأتي :

١. قد تمثل مسألة حياتية واحدة بأكثر من نموذج رياضي.

٢. قانون المساحة الجانبية للأسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع

ق = ط = محيط القاعدة = 2π نق. ولها نموذج رياضي واحد

المساحة الجانبية = $\frac{1}{2} \times 2\pi$ نق $\times$ ع

(المثال)

المساحة الجانبية ($أ_ج$) $= \frac{1}{2} \times 2\pi (ن_1 + ن_2) + \frac{1}{2} \times (ن_1 ل_1 + ن_2 ل_2 +$

$\frac{1}{2} \times (ل_2 ع + ل_3 ع) + ...$

$= \frac{1}{2} \times [(2\pi ن_1 + ن_1 ل_1 + ل_2 ع + ...) + (2\pi ن_2 + ن_2 ل_2 + ل_3 ع + ...)]$

$= \frac{1}{2} \times (ن_1 + ن_2)$ ، حيث ن سعة القاعدة ، ع سعة الأسطوانة

جدلاً :

١) هندسة جزئية مجتمعة = هيأة هندسية هامتها دائرة ومتباينة، حتى

٢) هندسة جزئية مجتمعة = هيأة هندسية دائرة ومتباينة، حتى

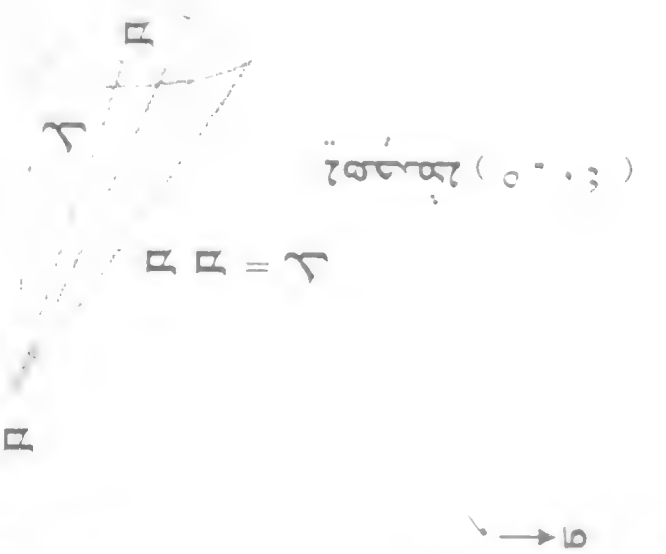
وهكذا على هيأة هندسية هامتها دائرة ومتباينة.

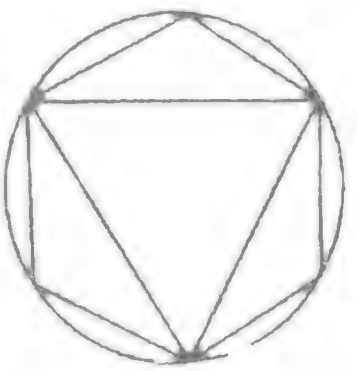
٣) كرة هندسة جزئية مجتمعة لذة ؛ هكذا لا معنى لهذه جملة مجتمعة

$\Leftarrow$ فكرة هندسة مجتمعة

٢) كرة هندسة جزئية مجتمعة ولذة ؛ هكذا معنى لهذه جملة مجتمعة

$\Leftarrow$ ف = ق ق، وفكرة لذتها = لذ هي هكذا مجتمعة





إهندسة (٥ - ٢٩)

وجد سند لذة جمعية جمعية على بداية لسعية جذابة حل هذه جملة على هيأة هندسية دهشة على هيأة هندسية لا تجتمع.

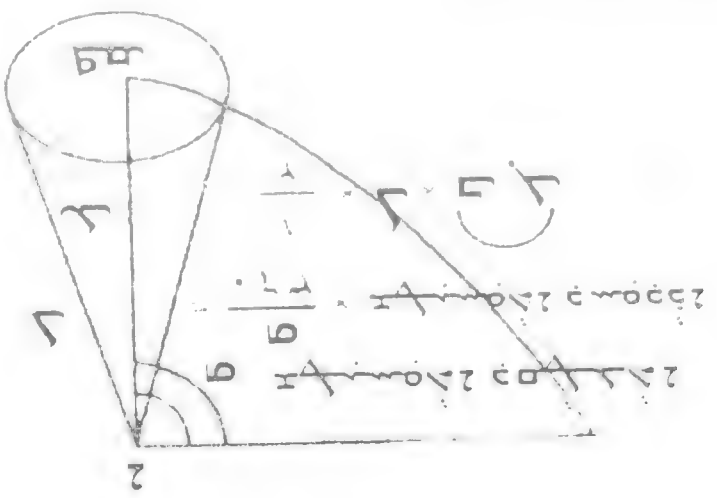
تجتمع جمل ق سعية جمعية جمعية وتجتمع جمل ق سعية جذابة وتجتمع جمل ب ب سعية جمعية جمعية وتجتمع جمل ب ب سعية جذابة.

وتجتمع جمل ، هذه جذابة جذابة. وتجتمع جمل ق هذه بحتمة ثم.

$\Leftarrow$ لـــــ ب ب = ب ، $\Leftarrow$ لـــــ ب ب = ب ب

جمعية.

٦) إذا كان حجم المخروط الذي مولده ل ل = ٢ ط ل ل ، ومساحة قاعدته ط ل ٢ ، وارتفاعه ع = ٣ ل ل ، فإن مساحة سطحه الجانبي = ط ل ل (ل ل + ل ق) .

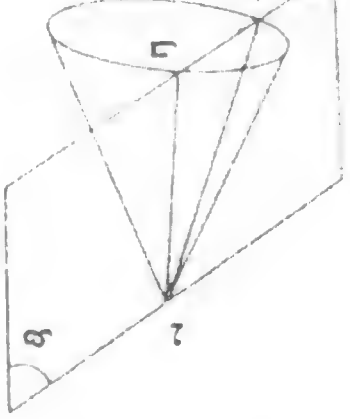


مساحة القاعدة = ط ل ٢ = ط (٣ ل ل) ٢ = ٩ ط ل ٢

مساحة السطح الجانبي = $\frac{1}{2}$ ل × ط ل ٢ = $\frac{1}{2}$ (٢ ط ل ل) ل = ٣ ط ل ٢

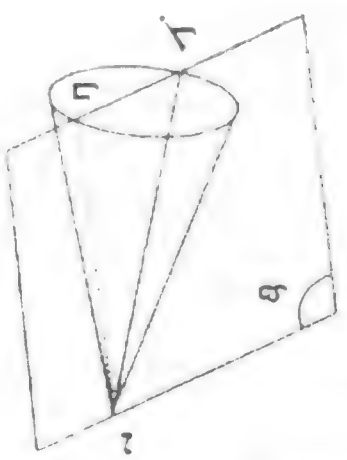
مساحة السطح الكلي = ٩ ط ل ٢ + ٣ ط ل ٢ = ١٢ ط ل ٢ وحدة مربعة .

مثال (٤٠٣٥)



المولد ل ل = ٨ سم

نصف قطر القاعدة ق = ٤ سم



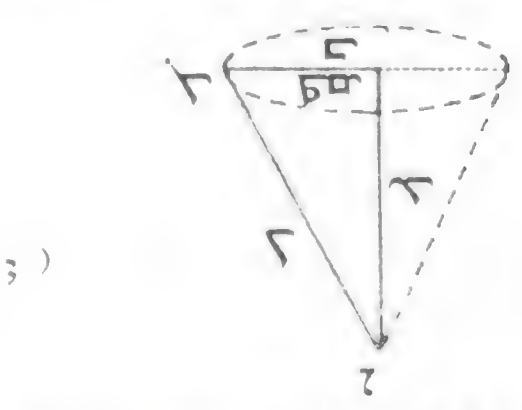
مثال (٤٠٣٥)

المولد ل ل = ٨ سم

نصف قطر القاعدة ق = ل ل

$\Rightarrow$ ق ≠ ل ل

٥) إذا كان حجم المخروط الدائري القائم = حجم نصف كرة مجوفة ، فأثبت أن مساحة سطح المخروط الجانبي = ٢ مساحة سطح نصف الكرة المجوفة .



مثال (٤٠٣٥)

حجم المخروط = حجم نصف كرة مجوفة

$\frac{1}{3}$ ط ق ٢ ع = $\frac{2}{3}$ ط ل ٣

$\frac{1}{3}$ ط ق ٢ ع = $\frac{2}{3}$ ط ل ٣

ق ٢ ع = ٢ ل ٣

ق ٢ = ٢ ل ٣ ÷ ع

ق ٢ = ٢ ل ٣ ÷ ل ل

ق ٢ = ٢ ل ٢ ل ل

ق ٢ = ٢ ل ٢ (ل ل) ٢

ق ٢ = ٢ ل ٢ (ل ل) ٢

ق = ل ل

مساحة السطح الجانبي للمخروط = ط ق ل ل

= ط ل ل ل ل

= ٢ ط ل ٢

مساحة السطح الجانبي لنصف الكرة المجوفة = $\frac{1}{2}$ ط ل ٢

= ط ل ٢

مساحة السطح الجانبي للمخروط = ٢ مساحة السطح الجانبي لنصف الكرة المجوفة

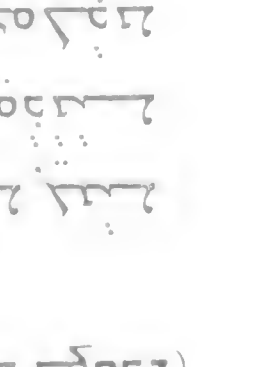
مساحة الجانبية لمخروط دائري قائم :

حالة خاصة (١) : مساحة الجانبية لمخروط متساوي الساقين

مخروط دائري قائم هو مخروط الجانبية فيه $= \frac{1}{2}$ محيط القاعدة $\times$ الراسم

حالة خاصة (٢)

١) إذا قطع مخروط دائري قائم بمستوى (لا يحتوي القاعدة) متوازي لها، فإن الجزء المحصور بين المستويين يسمى (مخروط دائري قائم مقطوع)





مخروط دائري قائم مقطوع

ملاحظات :

١) إذا قطع مخروط دائري قائم بمستوى متوازي لقاعدته فإن :

قطعة المخروط العليا تشابه المخروط الأصلي

المقطع الناتج دائرة

المخروط العلوي الناتج مخروط دائري قائم

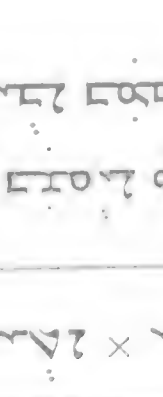
٢) إذا قطع مخروط دائري قائم بمستوى غير متوازي لقاعدته فإن :

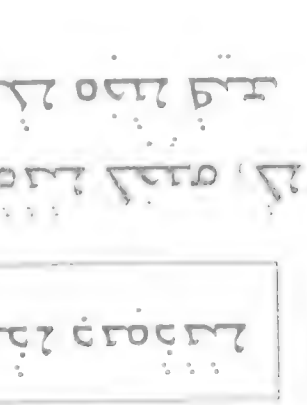
المقطع الناتج قطع ناقص

مخروط دائري قائم مقطوع

المقطع (٥٠٤٥)

المقطع (٥٠٤٤)





مخروط دائري قائم مقطوع

المقطع (٥٠٤٦)

مخروط دائري قائم مقطوع

المقطع (٥٠٤٧)

ملاحظة : إذا قطع مخروط دائري قائم بمستوى يوازي أحد راسمه فإن المقطع الناتج قطع مكافئ

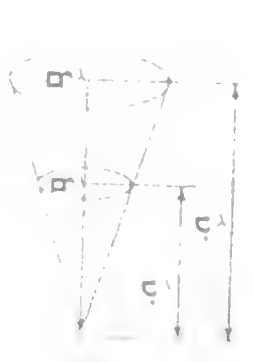
مساحة الجانبية لمخروط دائري قائم :

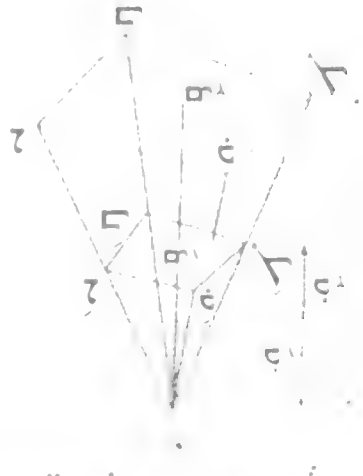
حالة خاصة (١) : مساحة الجانبية لمخروط متساوي الساقين

مخروط دائري قائم هو مخروط الجانبية فيه $= \frac{1}{2}$ محيط القاعدة $\times$ الراسم

حالة خاصة (٢)

١) إذا قطع مخروط دائري قائم بمستوى (لا يحتوي القاعدة) متوازي لها، فإن الجزء المحصور بين المستويين يسمى (مخروط دائري قائم مقطوع)





مخروط دائري قائم مقطوع

ملاحظات :

١) إذا قطع مخروط دائري قائم بمستوى متوازي لقاعدته فإن :

قطعة المخروط العليا تشابه المخروط الأصلي

المقطع الناتج دائرة

المخروط العلوي الناتج مخروط دائري قائم

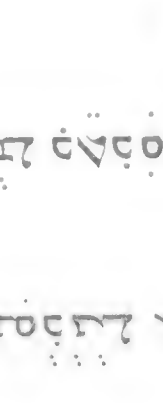
٢) إذا قطع مخروط دائري قائم بمستوى غير متوازي لقاعدته فإن :

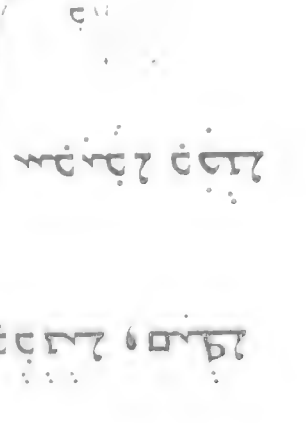
المقطع الناتج قطع ناقص

مخروط دائري قائم مقطوع

المقطع (٥٠٤٥)

المقطع (٥٠٤٤)





مخروط دائري قائم مقطوع

المقطع (٥٠٤٦)





مخروط دائري قائم مقطوع

المقطع (٥٠٤٧)

ملاحظة : إذا قطع مخروط دائري قائم بمستوى يوازي أحد راسمه فإن المقطع الناتج قطع مكافئ

مساحة الجانبية لمخروط دائري قائم :

حالة خاصة (١) : مساحة الجانبية لمخروط متساوي الساقين

مخروط دائري قائم هو مخروط الجانبية فيه $= \frac{1}{2}$ محيط القاعدة $\times$ الراسم

حالة خاصة (٢)

١) إذا قطع مخروط دائري قائم بمستوى (لا يحتوي القاعدة) متوازي لها، فإن الجزء المحصور بين المستويين يسمى (مخروط دائري قائم مقطوع)

مخروط دائري قائم مقطوع

ملاحظات :

١) إذا قطع مخروط دائري قائم بمستوى متوازي لقاعدته فإن :

قطعة المخروط العليا تشابه المخروط الأصلي

المقطع الناتج دائرة

المخروط العلوي الناتج مخروط دائري قائم

٢) إذا قطع مخروط دائري قائم بمستوى غير متوازي لقاعدته فإن :

المقطع الناتج قطع ناقص

مخروط دائري قائم مقطوع

المقطع (٥٠٤٥)

المقطع (٥٠٤٤)

مخروط دائري قائم مقطوع

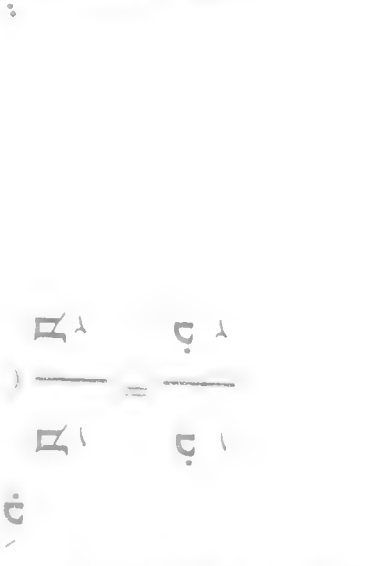
المقطع (٥٠٤٦)

مخروط دائري قائم مقطوع

المقطع (٥٠٤٧)

ملاحظة : إذا قطع مخروط دائري قائم بمستوى يوازي أحد راسمه فإن المقطع الناتج قطع مكافئ





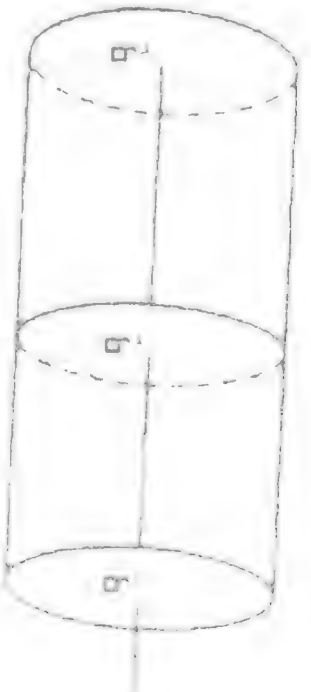


$$\Leftarrow \text{ك ل} = \text{ل م} \Rightarrow \text{ق}_{1} = \text{ق}_{2}$$

(٤٩ ـ ٥) المعطيات

مثال:

١٠ مثال جد مساحة سطح (كلية) الأسطوانة التي نصف قطر قاعدتها (دائرتها) ٣ سم وارتفاعها ٥ سم.



نصف قطر القاعدة (ق) = ١٥ سم

$\therefore$ مساحة السطح الجانبي = محيط القاعدة $\times$ الارتفاع

$$\text{ل} = \text{م} \times \text{ع}$$

$$= \frac{٦}{١} \text{ط} \times ٢ \text{ق}_{١} = \text{م} \times \text{ع}$$

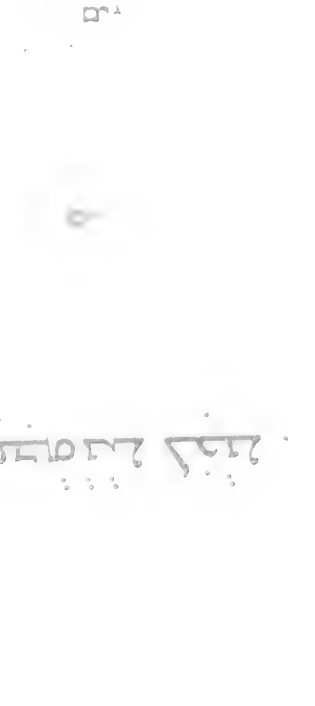
$$= \frac{٦}{١} \text{ط} (\text{ق}_{١} + ٤ \text{ق}_{٢} + \text{ق}_{١})$$

$$\text{ل} = \frac{٦}{١} \text{ط} (\text{ق}_{١} + \text{ق}_{٢} + \text{ق}_{٣})$$

(في الأسطوانة القائمة التي نحن بصددها)

$\text{ق}_{١} = \text{ق}_{٢} = \text{ق}_{٣}$ (لأن المقاطع العرضية المتوازية لكل منها تساوي مساحة القاعدة)

١٠ مثال جد مساحة السطح الجانبي لأسطوانة دائرية قائمة نصف قطر قاعدتها ٣ سم وارتفاعها ٥ سم.



نصف قطر القاعدة (ق) = ٣ سم

$\therefore$ مساحة السطح الجانبي = محيط القاعدة $\times$ الارتفاع

$$\text{ل} = \text{م} \times \text{ع}$$

$$= \frac{٦}{١} \text{ط} \times ٢ \text{ق}_{١} = \text{م} \times \text{ع}$$

$$= \frac{٦}{١} \text{ط} (\text{ق}_{١} + ٤ \text{ق}_{٢} + \text{ق}_{١})$$

$$\text{ل} = \frac{٦}{١} \text{ط} (\text{ق}_{١} + \text{ق}_{٢} + \text{ق}_{٣})$$

(في الأسطوانة القائمة التي نحن بصددها)

$\text{ق}_{١} = \text{ق}_{٢} = \text{ق}_{٣}$ (لأن المقاطع العرضية المتوازية لكل منها تساوي مساحة القاعدة)

٢٠ مثال جد مساحة السطح الجانبي لأسطوانة دائرية قائمة نصف قطر قاعدتها ٣ سم وارتفاعها ٥ سم.

نصف قطر القاعدة (ق) = ٣ سم

$\therefore$ مساحة السطح الجانبي = محيط القاعدة $\times$ الارتفاع

$$\text{ل} = \text{م} \times \text{ع}$$

$$= \frac{٦}{١} \text{ط} \times ٢ \text{ق}_{١} = \text{م} \times \text{ع}$$

$$= \frac{٦}{١} \text{ط} (\text{ق}_{١} + ٤ \text{ق}_{٢} + \text{ق}_{١})$$

$$\text{ل} = \frac{٦}{١} \text{ط} (\text{ق}_{١} + \text{ق}_{٢} + \text{ق}_{٣})$$

(في الأسطوانة القائمة التي نحن بصددها)

$\text{ق}_{١} = \text{ق}_{٢} = \text{ق}_{٣}$ (لأن المقاطع العرضية المتوازية لكل منها تساوي مساحة القاعدة)

٢٠ مثال جد مساحة السطح الجانبي لأسطوانة دائرية قائمة نصف قطر قاعدتها ٣ سم وارتفاعها ٥ سم.

نصف قطر القاعدة (ق) = ٣ سم

$\therefore$ مساحة السطح الجانبي = محيط القاعدة $\times$ الارتفاع

$$\text{ل} = \text{م} \times \text{ع}$$

$$= \frac{٦}{١} \text{ط} \times ٢ \text{ق}_{١} = \text{م} \times \text{ع}$$

$$= \frac{٦}{١} \text{ط} (\text{ق}_{١} + ٤ \text{ق}_{٢} + \text{ق}_{١})$$

$$\text{ل} = \frac{٦}{١} \text{ط} (\text{ق}_{١} + \text{ق}_{٢} + \text{ق}_{٣})$$

(في الأسطوانة القائمة التي نحن بصددها)

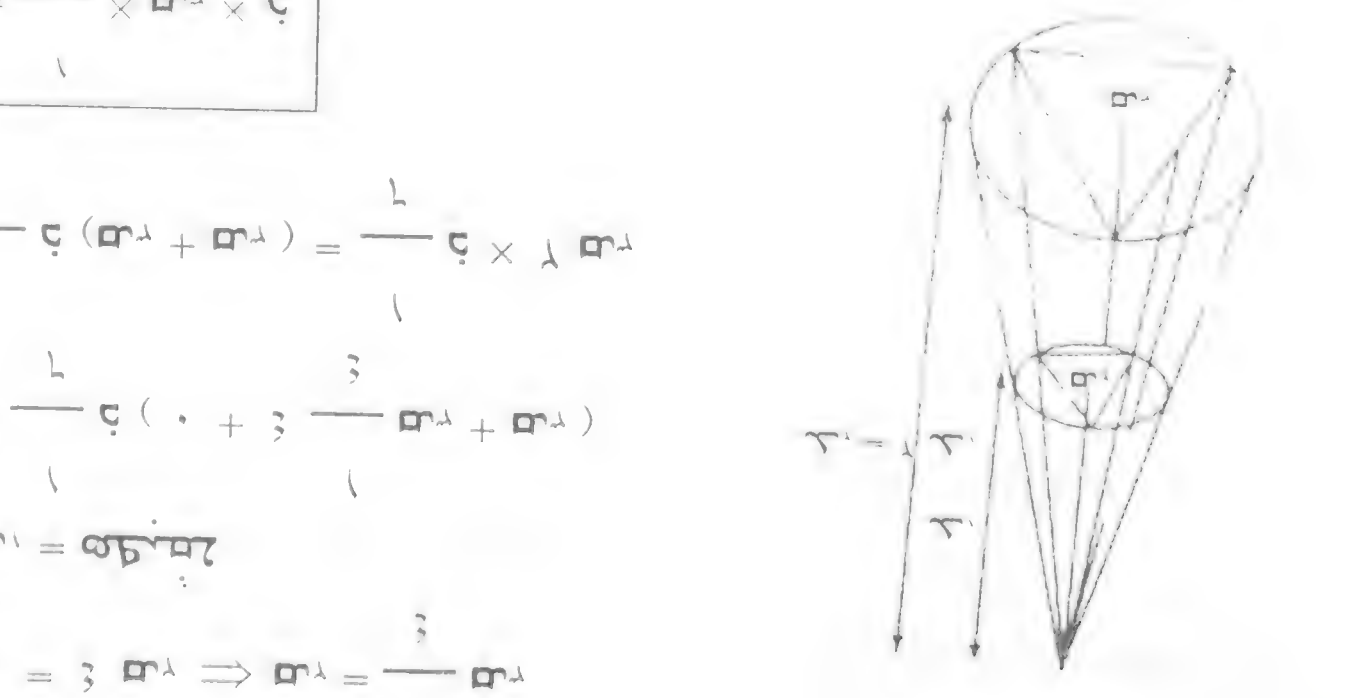
$\text{ق}_{١} = \text{ق}_{٢} = \text{ق}_{٣}$ (لأن المقاطع العرضية المتوازية لكل منها تساوي مساحة القاعدة)

$$= \frac{1}{6} \pi\, ع\, (ق_1^2 + ق_1^2 + 2\, ق_1 ق_2 + ق_2^2 + ق_2^2)$$

$$= \frac{1}{6} \pi\, ع\, (ق_1^2 + ق_2^2 + ق_1 (ق_1 + ق_2) + ق_2 (ق_1 + ق_2))$$

$$\therefore \text{ح} = \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

٤ ـ حجم جذع المخروط الدائري القائم (طريقة أخرى) (للمناقشة)



شكل (٥ ـ ٢٥)

$$\text{ح} = \frac{1}{3} \pi\, ق_3^2\, ع$$

$$\text{ح}_1 = \frac{1}{3} \pi\, ق_1^2\, ع_1$$

$$\text{ح}_2 = \frac{1}{3} \pi\, ق_2^2\, ع_2$$

$$\text{ح} = \text{ح}_2 - \text{ح}_1$$

$$= \frac{1}{3} \pi\, ق_2^2\, ع_2 - \frac{1}{3} \pi\, ق_1^2\, ع_1$$

$$= \frac{1}{3} \pi\, (ق_2^2\, ع_2 - ق_1^2\, ع_1)$$

$$= \frac{1}{3} \pi\, (ق_2^2\, (ع_1 + ع) - ق_1^2\, ع_1)$$

$$= \frac{1}{3} \pi\, (ق_2^2\, ع_1 + ق_2^2\, ع - ق_1^2\, ع_1)$$

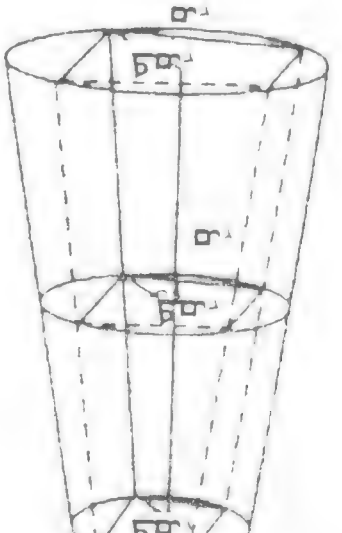
$$= \frac{1}{3} \pi\, ع\, (ق_2^2 + ق_1 ق_2 + ق_1^2)$$

$$\text{ح} = \frac{1}{3} \pi\, ع\, (ق_1^2 + ق_2^2 + ق_1 ق_2)$$

(هذا يمكننا أن نجده بطريقة أخرى)

$$ق_2 = \frac{ق_2}{2}$$

$$ق_3 = 4\, ق_2 \Rightarrow ق_2 = \frac{1}{4} ق_3$$



شكل (٥ ـ ٢٥)

$$\text{ح} = \frac{1}{3} \pi\, ق_3^2\, ع$$

$$\text{ح}_1 = \frac{1}{3} \pi\, ق_1^2\, ع_1$$

$$\text{ح}_2 = \frac{1}{3} \pi\, ق_2^2\, ع_2$$

$$\text{ح} = \text{ح}_2 - \text{ح}_1$$

$$= \frac{1}{3} \pi\, ق_2^2\, ع_2 - \frac{1}{3} \pi\, ق_1^2\, ع_1$$

$$= \frac{1}{3} \pi\, (ق_2^2\, (ع_1 + ع) - ق_1^2\, ع_1)$$

$$= \frac{1}{3} \pi\, (ق_2^2\, ع_1 + ق_2^2\, ع - ق_1^2\, ع_1)$$

$$= \frac{1}{3} \pi\, ع\, (ق_2^2 + ق_1 ق_2 + ق_1^2)$$

$$\text{ح} = \frac{1}{3} \pi\, ع\, (ق_1^2 + 4\, ق_2^2 + ق_1 ق_2)$$

$$ق_2 = \frac{1}{4} ق_3$$

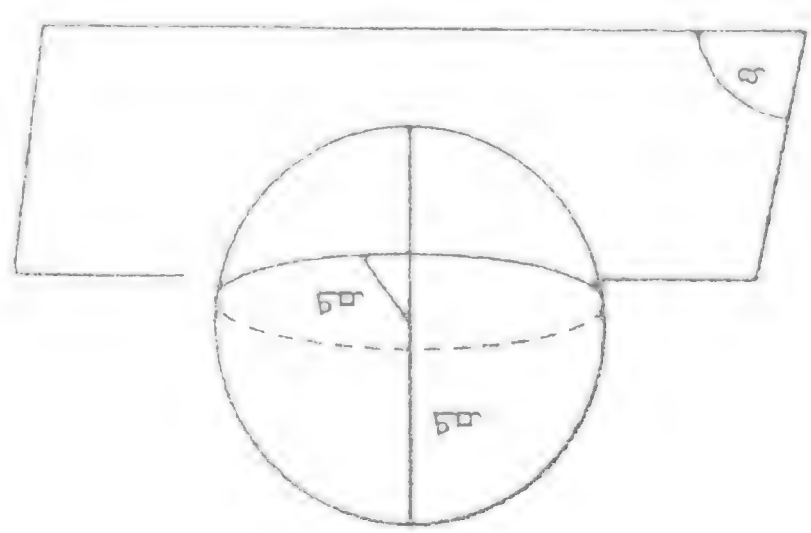
$$\text{ح} = \frac{1}{3} \pi\, ع\, (ق_1^2 + 4 \times \frac{1}{4} ق_3^2 + ق_1 \times \frac{1}{4} ق_3)$$

$$= \frac{1}{3} \pi\, ع\, (ق_3^2 + ق_3^2 + \frac{1}{4} ق_1 ق_3)$$

$$= \frac{1}{3} \pi\, ع\, (2\, ق_3^2 + \frac{1}{4} ق_1 ق_3)$$

$$\text{ح} = \frac{1}{3} \times ق_3 \times \pi\, ع$$

مثال ١٠



الحل :

١. نفرض أن ف هي قاعدة جسم مكون من هذه القاعدة

والمستوى ق .

٢. إذا كانت مساحة قاعدة هذا الجسم تساوي ١٠٠ سم٢ وارتفاعه

٥ سم فأوجد حجمه .

الحل :

حجم الجسم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × ١٠٠ × ٥

= ١٦٦,٦٧ سم٣

٣. أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين

المنحنى ص = $\sqrt{س}$ ، ومحور السينات ، والمستقيم س = ٤

دورة كاملة حول محور السينات .

الحل :

حجم الجسم الناتج = $\pi \int_{أ}^{ب} ص^{٢}$ د س

= $\pi \int_{٠}^{٤} (\sqrt{س})^{٢}$ د س

= $\pi \int_{٠}^{٤} س$ د س

= $\pi \left[\frac{س^{٢}}{٢} \right]_{٠}^{٤}$

= $\pi \left(\frac{١٦}{٢} - ٠ \right)$

= ٨ π وحدة حجم

مثال ١١

أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين

المنحنى ص = $\sqrt{س}$ ، ومحور السينات ، والمستقيم س = ٤

دورة كاملة حول محور الصادات .

الحل :

حجم الجسم الناتج = $\pi \int_{أ}^{ب} س^{٢}$ د ص

= $\pi \int_{٠}^{٢} (ص^{٢})^{٢}$ د ص

= $\pi \int_{٠}^{٢} ص^{٤}$ د ص

= $\pi \left[\frac{ص^{٥}}{٥} \right]_{٠}^{٢}$

= $\pi \left(\frac{٣٢}{٥} - ٠ \right)$

= $\frac{٣٢}{٥}$ π وحدة حجم

مثال ١٢

أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين

المنحنى ص = $\sqrt{س}$ ، ومحور السينات ، والمستقيم س = ٤

دورة كاملة حول المستقيم س = ٤

الحل :

حجم الجسم الناتج = $\pi \int_{أ}^{ب} (نق_{٢}^{٢} - نق_{١}^{٢})$ د ص

= $\pi \int_{٠}^{٢} ((٤ - ص^{٢})^{٢} - (٤ - ٠)^{٢})$ د ص

= $\pi \int_{٠}^{٢} (١٦ - ٨ ص^{٢} + ص^{٤} - ١٦)$ د ص

= $\pi \int_{٠}^{٢} (ص^{٤} - ٨ ص^{٢})$ د ص

= $\pi \left[\frac{ص^{٥}}{٥} - \frac{٨ ص^{٣}}{٣} \right]_{٠}^{٢}$

= $\pi \left(\frac{٣٢}{٥} - \frac{٦٤}{٣} - ٠ \right)$

= $\frac{-١٦٠}{١٥}$ π وحدة حجم

ملاحظة هامة

حجم الجسم الناتج = $\frac{١}{٣}$ ط ع (م$_{١}$ + م$_{٢}$ + $\sqrt{م_{١} \times م_{٢}}$)

مثال (٤): أوجد حجم الجسم المحصور بين الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ والأسطوانة $x^2 + y^2 = 2x$.

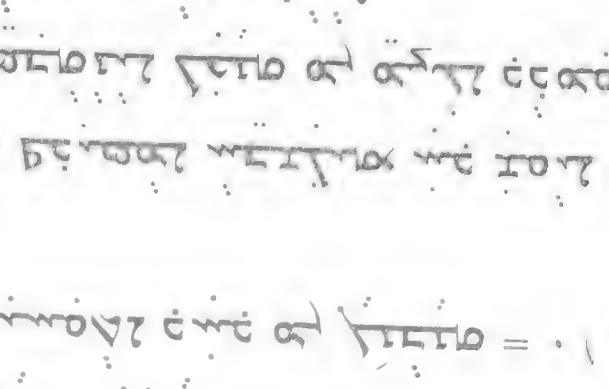
الحل:

$$V = \frac{1}{6}\pi(a_1 + a_2 + a_3)$$

$$= \frac{1}{6} \times 2\pi(0 + 4 + (4 - a_2^2)) = \frac{16\pi}{6}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi a_2^2 \cdot 4 \Rightarrow$$

$$a_2^2 = 4 - a_2^2 \Rightarrow a_2 = \sqrt{2}$$



مثال (٥): أوجد حجم الجسم المحصور بين الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ والأسطوانة $x^2 + y^2 = 2x$.

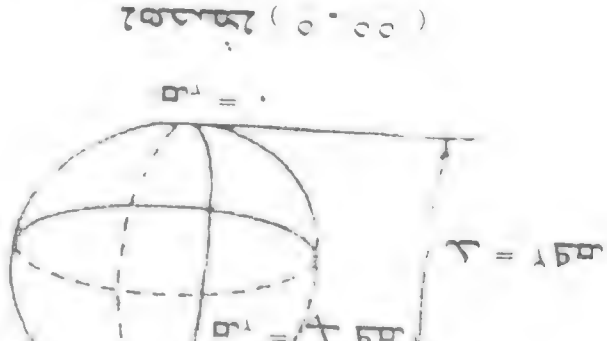
الحل:

$$V = \frac{1}{6}\pi(a_1 + a_2 + a_3)$$

$$= \frac{1}{6} \times 2\pi(0 + 4 + (4 - a_2^2)) = \frac{16\pi}{3}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi a_2^2 \cdot 4 \Rightarrow$$

$$a_2^2 = 4 - a_2^2 \Rightarrow a_2 = \sqrt{2}$$



مثال (٦): أوجد حجم الجسم المحصور بين الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ والأسطوانة $x^2 + y^2 = 2x$.

الحل:

$$V = \frac{1}{6}\pi(a_1 + a_2 + a_3)$$

$$= \frac{1}{6} \times 2\pi(0 + 4 + (4 - a_2^2)) = \frac{16\pi}{3}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi a_2^2 \cdot 4 \Rightarrow$$

$$a_2^2 = 4 - a_2^2 \Rightarrow a_2 = \sqrt{2}$$

۱۷) دوخت سوخت وسیلۀ نخلی دختر نوۀ موبایلش لذت حیاتی

هفتۀ خلیج کم مواجهه. چند حمله ۸ ساعت ۵۱۰ سرمایه

چغواله = ۱۰۲ ساعت، ۵ضعف چرخید = ۱۵ ساعت زشت بانک چرخید

ساعتمام علنی.

۱۸) ۱۰ جراحی چگالیدن له تنفس چاه نخ چغندر ۷/۸ تنفس

واحد. خسته چوبی میز چاه = $\frac{۷}{۸}$ تنفس

فصل خامس

حلول تمارين

٦ـ١ لجنة

٦ـ٢ جدية، مبتسمة

٦ـ٣ جدية، جونسية، بلدة، بيت، صغيرة، زوجة، جملة

٦ـ٤ جديدة، جونسية، بالزة، بيوض، جديد، صغيرة (د) ج

صديقات، ونسوية

٦ـ٥ بمكونة صغيرة، (ب) ج: ن ≥ ١

سيء ما يملأه إليه من ولاية يزيد ولم يدع إحداثه حقداً
عليه وإحنة يحتاج إلى سله من قلبه وطرحه عن نفسه. ثم
ذكر ما توعد به من سوء منقلبه إلا عصابة يدعو بها
يسمعه هذا حتى يتدبر ويتوعد هذا ولو علم أنه
عصابته وجنده يسأل إليه ويتوسل.
حتى يحاول يحتال يريد إليه من الوجه الذي يعلم أنه
يحاذره لعلمه أنه سيأتي يأتي به كأنه يأتيه أخذ إليه
حقاً حتى.

تعريف (٦-٢-٣) (المجموعة)

يقال عن عنصر x في فضاء جزئي A من فضاء متجهات V أنه توليفة خطية من عناصر المجموعة S ⊂ V إذا وجدت أعداد حقيقية $a_1, a_2, \ldots, a_n$ وعناصر $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ بحيث $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$.

مبرهنة (٦-٢-٣) (المجموعة)

تكون المجموعة S ⊂ V مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان أي عنصر في فضاء متجهات V يمكن كتابته كتوليفة خطية من عناصر S بطريقة واحدة على الأكثر.

البرهان :

(١) نفرض أن S مستقلة خطياً (حسب فرضية المبرهنة) ونبرهن أن أي عنصر في V يمكن كتابته كتوليفة خطية من عناصر S بطريقة واحدة على الأكثر.

(٢) نفرض جدلاً أن هناك عنصراً في V يمكن كتابته كتوليفة خطية من عناصر S بطريقتين مختلفتين على الأقل.

ليكن $x \in V$ بحيث $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ و $x = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$ حيث $a_i \neq b_i$ لبعض $i = 1, 2, \ldots, n$

(٣) نطرح المعادلتين طرفاً لطرف فنجد أن

$$(a_1 - b_1)x_1 + (a_2 - b_2)x_2 + \cdots + (a_n - b_n)x_n = 0$$

(٤) بما أن S مستقلة خطياً فإن $a_i - b_i = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$

أي أن $a_i = b_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ وهذا يناقض (٢).

(٥) نستنتج من (٤) أن كل عنصر في V يمكن كتابته كتوليفة خطية من عناصر S بطريقة واحدة على الأكثر.

(٦) نفرض أن كل عنصر في V يمكن كتابته كتوليفة خطية من عناصر S بطريقة واحدة على الأكثر ونبرهن أن S مستقلة خطياً.

(٧) ليكن $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ حيث $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$

(٨) بما أن $0 = 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n$ فإن $a_i = 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ وذلك حسب (٦).

(٩) نستنتج من (٧) و (٨) أن S مستقلة خطياً.

ملاحظة (٦-٢-٤) (المجموعة)

يقال لعنصر x في فضاء متجهات V إنه توليفة خطية من عناصر المجموعة S ⊂ V إذا وجدت أعداد حقيقية $a_1, a_2, \ldots, a_n$ وعناصر $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ بحيث $x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$.

مبرهنة (٦-٢-٥) (المجموعة)

لتكن S مجموعة جزئية غير خالية من فضاء متجهات V. عندئذ تكون S مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان أي عنصر في V يمكن كتابته كتوليفة خطية من عناصر S بطريقة واحدة على الأكثر.

٦-٢ تعريف وأمثلة

تعريف (٦-٢-١) (المجموعة)

ليكن V فضاء متجهات على الحقل F. نقول عن المجموعة S ⊂ V إنها مستقلة خطياً إذا تحقق الشرط التالي :

(١) نقول عن S إنها مستقلة خطياً (عند غياب أي شرط)

(٢) نقول عن S إنها مستقلة خطياً إذا كان $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ حيث $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ و $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$ فإن $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$

(٣) نقول عن S إنها مرتبطة خطياً إذا لم تكن مستقلة خطياً.

(٤) نقول عن S إنها مرتبطة خطياً إذا كانت S غير مستقلة خطياً.

مثال : لتكن S مجموعة جزئية من فضاء متجهات V على حقل الأعداد الحقيقية R. عندئذ تكون S مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان أي عنصر في V يمكن كتابته كتوليفة خطية من عناصر S بطريقة واحدة على الأكثر.

مثال (٦-٢-٢) (المجموعة)

ليكن $V = R^2$ فضاء متجهات على الحقل R. نعتبر المجموعة $S = \{(1, 0), (0, 1), (3, 4)\}$

الحل : نفرض جدلاً أن S مستقلة خطياً.

ليكن $x = (2, 5) \in V$ بما أن $x = 2(1, 0) + 5(0, 1) + 0(3, 4)$ و $x = 2(1, 0) + 5(0, 1) + 1(3, 4)$ فإن x يمكن كتابته كتوليفة خطية من عناصر S بطريقتين مختلفتين على الأقل.

وهذا يناقض كون S مستقلة خطياً.

مثال (٦-٢-٣) (المجموعة)

ليكن $V = R^2$ فضاء متجهات على الحقل R. نعتبر المجموعة $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$

نبرهن أن S مستقلة خطياً.

ليكن $x = (a, b) \in V$ بحيث $x = a(1, 0) + b(0, 1)$ فإن x يمكن كتابته كتوليفة خطية من عناصر S بطريقة واحدة على الأكثر.

ت) إذا لجأ له (ا) ملهم فإنه إذا .

جعلناه وصلنا

ة. الدة جعلناه فجعل ة. الدة جعلناه فجأة . ة٣ الدة

ا) تعلم للجأ جاء

الوقفة (٣)	له دعاك إذ فإذا جعوقفة سجا لنا .

فجأة (٦ . ٢ . ٤٣) (لجأ للسؤال)

إذ فجأة ة. ا ة. ٢ جاء فجأة ة. ا ة. ٢ ة. ٣ .

| الوقفة (٣) | إذ تعالى ة. = {٦} ، ة. ٢= {١ ، ٢ ، ٣} ، ة. ٣ = {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٢٩ ، ٣٠ ، ٣١ ، ٣٢ ، ٣٣ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٦ ، ٣٧ ، ٣٨ ، ٣٩ ، ٤٠ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٤ ، ٤٥ ، ٤٦ ، ٤٧ ، ٤٨ ، ٤٩ ، ٥٠ ، ٥١ ، ٥٢ ، ٥٣ ، ٥٤ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٨ ، ٥٩ ، ٦٠ ، ٦١ ، ٦٢ ، ٦٣ ، ٦٤ ، ٦٥ ، ٦٦ ، ٦٧ ، ٦٨ ، ٦٩ ، ٧٠ ، ٧١ ، ٧٢ ، ٧٣ ، ٧٤ ، ٧٥ ، ٧٦ ، ٧٧ ، ٧٨ ، ٧٩ ، ٨٠ ، ٨١ ، ٨٢ ، ٨٣ ، ٨٤ ، ٨٥ ، ٨٦ ، ٨٧ ، ٨٨ ، ٨٩ ، ٩٠ ، ٩١ ، ٩٢ ، ٩٣ ، ٩٤ ، ٩٥ ، ٩٦ ، ٩٧ ، ٩٨ ، ٩٩ ، ١٠٠} .

فجأة ة. ا ∩ ة. ٢ = ∅

إذ فجأة ة. ا ∪ ة. ٢ = ة. ٣

فجأة (٦ . ٢ . ٤٣) (لجأ للسؤال)

إذ فجأة ة. ا ∩ ة. ٢ = ∅

فجأة (٦ . ٢ . ٤٤) (لجأ لا فجأة)

إذ فجأة ة. ا ∪ ة. ٢ = ة. ٣

فجأة .

سجا جاء الوقفة (٣) ة. ١٠٠ لجأ جاء فجأة ة. ٢٠ ∩ ة. ٣٠ = ∅

فجأة ة. ٢٠ ∪ ة. ٣٠ = ة. ١٠٠

فجأة (٦ . ٢ . ٤٤) (لجأ لا فجأة)

إذ فجأة ة. ا ∩ ة. ٢ = ∅

فجأة (٦ . ٢ . ٤٥) (لجأ فجأة)

إذ فجأة ة. ا ∪ ة. ٢ = ة. ٣

فجأة .

ة. الدة جعلناه فجعل ة. الدة جعلناه فجأة . ة٣ الدة

جعلناه وصلنا

ت) إذا لجأ له (ا) ملهم فإنه إذا .

٤) ضوئي ضمدة جافة.

٣) لا تضع ضمدة جبسية على أ، ب، ج، د فليس لها فائدة جسدية لا
فائدة علاجية.

٢. ضمدة ضاغطة جافة تحتوي على ملمس مرنة يغطي
ج. (أ، د لا يلامس الجرح مباشرة)
ب. (أ، د لا يلامس الجرح مباشرة)
أ. (د لا يلتصق بالجرح مباشرة)
ج. (أ، د يلامس الجرح مباشرة)
ب. (أ، ج، د لا يلتصق بالجرح مباشرة).

٤) ضوئي ضمدة جافة لا تلتصق بالجرح مباشرة.

١) ضمدة ضاغطة جافة

تمرين ٦ - ١

(١) أ، ب، ج مادة نقية، فإذا علمت أن مادة جيدة تحتوي على مادة
نقية فقط، ضمدة جافة.

(٢) حيث يتم على مادة الجافة معظم مادة الجافة سوف. أ، ملمس
الجافة يصبح جافة لأن لا ضد الجرح وتليس التي يتم الجافة. ضمد

$$\text{أ) } A_1 = \{1, 3, 4, 5\},\ A_2 = \{1, 3, 5\},\ A_3 = \{2, 4, 6\}$$

$$\text{ب) } A_1 \cup A_2 = \{3, 5\} \neq \emptyset$$

$$\therefore A_1 \text{ و } A_2 \text{ ( )}$$

$$A_1 \cup A_3 = \{2\} = \emptyset$$

$$\therefore A_1 \text{ و } A_3 \text{ ( )}$$

$$\text{لماذا } A_1 \cup A_3 = \emptyset$$

$$\therefore A_1 \text{ و } A_3 \text{ ( )}$$

٤. ضوء طيفي أحادي الطول الموجي ٦٠٠ نم يؤثر في شريحة مزدوجة الشق، فإذا طيفي أحادي الطول الموجي ٤٠٠ نم يؤثر في الشريحة نفسها، فإن المسافة بين الهدب المركزي والهدب المضيء الأول في كلتا الحالتين:

أ) تتساوى في الحالتين

ب) تكون أكبر في الحالة الأولى

ج) تكون أكبر في الحالة الثانية

د) تكون أكبر في الحالة الأولى إذا كان الشق ضيقًا

هـ) تكون أكبر في الحالة الثانية إذا كان الشق عريضًا

و) لا يمكن التحديد بالمعلومات المعطاة

٥) تتولد أطياف متصلة عند تحليل الضوء الأبيض الصادر عن:

أ) مصباح الزئبق

ب) الشمس (بعد مرورها عبر الغلاف الجوي)

ج) المصباح (قبل مرورها عبر الموشور)

د) المصباح (بعد مرورها عبر الموشور)

هـ) لا يمكن تحديد ذلك

و) المصباح (بعد مرورها عبر الغلاف الجوي)

إجابة السؤال

السؤال الثاني

أ) عند المصباح يكون طول موجة الضوء الأحادي ٦٠٠ نم يؤثر في شريحة مزدوجة الشق، فإذا طيفي أحادي الطول الموجي ٤٠٠ نم يؤثر في الشريحة نفسها، فإن المسافة بين الهدب المركزي والهدب المضيء الأول في كلتا الحالتين:

ب) عند المصباح يكون طول موجة الضوء الأحادي ٦٠٠ نم يؤثر في شريحة مزدوجة الشق، فإذا طيفي أحادي الطول الموجي ٤٠٠ نم يؤثر في الشريحة نفسها، فإن المسافة بين الهدب المركزي والهدب المضيء الأول في كلتا الحالتين:

إجابة السؤال

السؤال الثالث

١. ٣ مترسمة يؤثر بالضوء في مصباح الزئبق

مطلوب

(١) حساب الطول الموجي للضوء الصادر = ف ف' × ف'ف/ البعد بين الشقين

(٢) ل (ف) = ل (ف١) × ل (ف٢)

دصنا: ق ١ = { ٤ ، ٦ } ، ل(ق ١) = ٢

ق ٢ فيعصنا ذصيذا جيلوقصا لهصيذا دميلذا هذيتذ جوجز

ق ٢ فيعصنا ذصيذا جيلوقصا لهصيذا دحذا جمعقصا

ق ٢ فيعصنا ذصيذا جيلوقصا لهصيذا دميلذا هذيتذ جوجز

عتصم ومصا : ق ١ فيعصنا ذصيذا جيلوقصا لهصيذا دميلذا هجصتذا جوجز

دصيذا هدمضيز ىلم ح هذلذا دصيذا نمبق

جذيا

(د) دهز ىلم هتيذا جيلصيوجصا جيلوقصا ذصيذا.

(ا) عتصم ذصيذا جيلوقصا

فيميذا سعذيذا لهصيذا جوجز.

(ه) فيعصنا جيميذا جوجز سعذيذا ج جذق جمعقصا ج

هلوقصا (٥)

زذحذا زه نهيذ هر دصيذ. زهج جيلم لذيذا جيلوقصا جيلوقصا جيلوقصا جيلوقصا :

(ا) ل (ق ١) = ٢ × ٢ × ٢ = ٢٣ = ٨

(٢) ل (ق ٢) = ٦ × ٦ × ٦ = ٦٣ = ٢١٦

(٣) (ق ٣) (جذيذصهذا جهتيذذا) = ١٠ × ١٠ = ١٠٠

ل (ق ٣) (جذ هتيذذا) = ١٠ × ٩ = ٩٠

جذيا

ق ذيعذا سعذ لهذ جهتيذذا ه لهذ ذسيذذا جذ هتيذذا .

(٢) لهذ لذتعذا جيذب لهجتذا جيمقصذا هر جيصذ لهذ يذصذ لهجتذا

(٣) فيقذا جيذلذا جذ هتيذذا جيلوقصا ذصيذا.

(١) فيقذا جيميذا جوجز سعذيذ ٣ لهذا .

جهز ىلمهر هجيلوجصا جيمصيذا جيلوقصا ذصيذا جيذب :

هلوقصا (٤)

زذحذا زه نهيذ هر دصيذ. زهج جيلم لذيذا جيلوقصا جيذب :

ه هجيذيذا ىلم قيذصذا لهتذيذ لذهذ ذيذ دصيذ هدمضيز هر ذلذا زه

١٠ لكل عدد طبيعي n يوجد عدد طبيعي وحيد r بحيث $n = r$ أو $n = r + 1$

حيث r عدد طبيعي أقل من n أو يساويه.

مثال

هل n عدد زوجي أم فردي؟

الحل

إذا كان n عدداً طبيعياً فإن n يكون على الصورة $2k$ أو $2k + 1$ حيث k عدد طبيعي أقل من n أو يساويه.

فإذا كان $n = 2k$ فإن n عدد زوجي.

وإذا كان $n = 2k + 1$ فإن n عدد فردي.

مثال

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 - n$ يقبل القسمة على 6 بدون باقٍ.

الحل

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$$

حاصل ضرب ثلاثة أعداد طبيعية متتالية.

أحد هذه الأعداد على الأقل يقبل القسمة على 2 بدون باقٍ.

أحد هذه الأعداد على الأقل يقبل القسمة على 3 بدون باقٍ.

$\therefore n^3 - n$ يقبل القسمة على 6 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^5 - n$ يقبل القسمة على 30 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^7 - n$ يقبل القسمة على 42 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 5n$ يقبل القسمة على 6 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 11n$ يقبل القسمة على 6 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 23n$ يقبل القسمة على 24 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 47n$ يقبل القسمة على 48 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 119n$ يقبل القسمة على 120 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 167n$ يقبل القسمة على 168 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 359n$ يقبل القسمة على 360 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 503n$ يقبل القسمة على 504 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 839n$ يقبل القسمة على 840 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 1679n$ يقبل القسمة على 1680 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 2519n$ يقبل القسمة على 2520 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 4199n$ يقبل القسمة على 4200 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 5039n$ يقبل القسمة على 5040 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 8399n$ يقبل القسمة على 8400 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 10079n$ يقبل القسمة على 10080 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 16799n$ يقبل القسمة على 16800 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 20159n$ يقبل القسمة على 20160 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 33599n$ يقبل القسمة على 33600 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 40319n$ يقبل القسمة على 40320 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 67199n$ يقبل القسمة على 67200 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 80639n$ يقبل القسمة على 80640 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 134399n$ يقبل القسمة على 134400 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 161279n$ يقبل القسمة على 161280 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 268799n$ يقبل القسمة على 268800 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 322559n$ يقبل القسمة على 322560 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 537599n$ يقبل القسمة على 537600 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 645119n$ يقبل القسمة على 645120 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 1075199n$ يقبل القسمة على 1075200 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 1290239n$ يقبل القسمة على 1290240 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 2150399n$ يقبل القسمة على 2150400 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 2580479n$ يقبل القسمة على 2580480 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 4300799n$ يقبل القسمة على 4300800 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 5160959n$ يقبل القسمة على 5160960 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 8601599n$ يقبل القسمة على 8601600 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 10321919n$ يقبل القسمة على 10321920 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 17203199n$ يقبل القسمة على 17203200 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 20643839n$ يقبل القسمة على 20643840 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 34406399n$ يقبل القسمة على 34406400 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 41287679n$ يقبل القسمة على 41287680 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 68812799n$ يقبل القسمة على 68812800 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 82575359n$ يقبل القسمة على 82575360 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 137625599n$ يقبل القسمة على 137625600 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 165150719n$ يقبل القسمة على 165150720 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 275251199n$ يقبل القسمة على 275251200 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 330301439n$ يقبل القسمة على 330301440 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 550502399n$ يقبل القسمة على 550502400 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 660602879n$ يقبل القسمة على 660602880 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 1100503679n$ يقبل القسمة على 1100503680 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 1320603839n$ يقبل القسمة على 1320603840 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 2200804799n$ يقبل القسمة على 2200804800 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 2640904319n$ يقبل القسمة على 2640904320 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 4401204479n$ يقبل القسمة على 4401204480 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 5281304959n$ يقبل القسمة على 5281304960 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 8801605119n$ يقبل القسمة على 8801605120 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 10561805759n$ يقبل القسمة على 10561805760 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 17602405119n$ يقبل القسمة على 17602405120 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 21122886399n$ يقبل القسمة على 21122886400 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 35204810239n$ يقبل القسمة على 35204810240 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 42245772799n$ يقبل القسمة على 42245772800 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 70409620479n$ يقبل القسمة على 70409620480 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 84491545599n$ يقبل القسمة على 84491545600 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 140819240959n$ يقبل القسمة على 140819240960 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 168983091199n$ يقبل القسمة على 168983091200 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 281638481919n$ يقبل القسمة على 281638481920 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 337966182399n$ يقبل القسمة على 337966182400 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 563276963839n$ يقبل القسمة على 563276963840 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 675932364799n$ يقبل القسمة على 675932364800 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 1126553927679n$ يقبل القسمة على 1126553927680 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 1351864728319n$ يقبل القسمة على 1351864728320 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 2253107855359n$ يقبل القسمة على 2253107855360 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 2703729456639n$ يقبل القسمة على 2703729456640 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 4506215710719n$ يقبل القسمة على 4506215710720 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 5407458913279n$ يقبل القسمة على 5407458913280 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 9012431421439n$ يقبل القسمة على 9012431421440 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 10814917826559n$ يقبل القسمة على 10814917826560 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 18024863242879n$ يقبل القسمة على 18024863242880 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 21629834653439n$ يقبل القسمة على 21629834653440 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 36049726485759n$ يقبل القسمة على 36049726485760 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 43259669306879n$ يقبل القسمة على 43259669306880 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 72099452971519n$ يقبل القسمة على 72099452971520 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 86519339613759n$ يقبل القسمة على 86519339613760 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 144199179943039n$ يقبل القسمة على 144199179943040 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 172999359227519n$ يقبل القسمة على 172999359227520 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 288399359887359n$ يقبل القسمة على 288399359887360 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 345999359454719n$ يقبل القسمة على 345999359454720 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 576799359774719n$ يقبل القسمة على 576799359774720 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 691199359109439n$ يقبل القسمة على 691199359109440 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 1151999359549439n$ يقبل القسمة على 1151999359549440 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 1382399359664639n$ يقبل القسمة على 1382399359664640 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 2303999359329279n$ يقبل القسمة على 2303999359329280 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 2764799359444479n$ يقبل القسمة على 2764799359444480 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 4607999359219199n$ يقبل القسمة على 4607999359219200 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 5529599359334399n$ يقبل القسمة على 5529599359334400 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 9215999359109119n$ يقبل القسمة على 9215999359109120 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 11059199359224319n$ يقبل القسمة على 11059199359224320 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 18431999359439039n$ يقبل القسمة على 18431999359439040 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 22118399359553279n$ يقبل القسمة على 22118399359553280 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 36863999359328959n$ يقبل القسمة على 36863999359328960 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 44236799359443199n$ يقبل القسمة على 44236799359443200 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 73727999359218879n$ يقبل القسمة على 73727999359218880 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 88473599359333119n$ يقبل القسمة على 88473599359333120 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 147455999359108799n$ يقبل القسمة على 147455999359108800 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 176947199359223039n$ يقبل القسمة على 176947199359223040 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 294911999359438719n$ يقبل القسمة على 294911999359438720 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 353894399359553599n$ يقبل القسمة على 353894399359553600 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 589823999359328639n$ يقبل القسمة على 589823999359328640 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 707788799359443839n$ يقبل القسمة على 707788799359443840 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 1179647999359218559n$ يقبل القسمة على 1179647999359218560 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 1415577599359333759n$ يقبل القسمة على 1415577599359333760 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 2359295999359108479n$ يقبل القسمة على 2359295999359108480 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 2831155199359223679n$ يقبل القسمة على 2831155199359223680 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 4718591999359438399n$ يقبل القسمة على 4718591999359438400 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 5662310399359553279n$ يقبل القسمة على 5662310399359553280 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 9437183999359328319n$ يقبل القسمة على 9437183999359328320 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 11324620799359443519n$ يقبل القسمة على 11324620799359443520 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 18874367999359218239n$ يقبل القسمة على 18874367999359218240 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 22649241599359333439n$ يقبل القسمة على 22649241599359333440 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 37748735999359108159n$ يقبل القسمة على 37748735999359108160 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 45298483199359223359n$ يقبل القسمة على 45298483199359223360 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 75497471999359438079n$ يقبل القسمة على 75497471999359438080 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 90596966399359553279n$ يقبل القسمة على 90596966399359553280 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 150994943999359328319n$ يقبل القسمة على 150994943999359328320 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 181193932799359443519n$ يقبل القسمة على 181193932799359443520 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 301989887999359218239n$ يقبل القسمة على 301989887999359218240 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 362387865599359333439n$ يقبل القسمة على 362387865599359333440 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 603979775999359108159n$ يقبل القسمة على 603979775999359108160 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 724775731199359223359n$ يقبل القسمة على 724775731199359223360 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 1207959551999359438079n$ يقبل القسمة على 1207959551999359438080 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 1449551462399359553279n$ يقبل القسمة على 1449551462399359553280 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 2415919103999359328319n$ يقبل القسمة على 2415919103999359328320 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 2899102924799359443519n$ يقبل القسمة على 2899102924799359443520 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 4831838207999359218239n$ يقبل القسمة على 4831838207999359218240 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 5798205849599359333439n$ يقبل القسمة على 5798205849599359333440 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 9663676415999359108159n$ يقبل القسمة على 9663676415999359108160 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 11596411699359223359n$ يقبل القسمة على 11596411699359223360 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 19327352831999359438079n$ يقبل القسمة على 19327352831999359438080 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 23192823295999359553279n$ يقبل القسمة على 23192823295999359553280 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 38654705663999359328319n$ يقبل القسمة على 38654705663999359328320 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 46385646591999359443519n$ يقبل القسمة على 46385646591999359443520 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 77309411327999359218239n$ يقبل القسمة على 77309411327999359218240 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 92771293183999359333439n$ يقبل القسمة على 92771293183999359333440 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 154618822655999359108159n$ يقبل القسمة على 154618822655999359108160 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 185542587391999359223359n$ يقبل القسمة على 185542587391999359223360 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 309237645311999359438079n$ يقبل القسمة على 309237645311999359438080 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 370985174527999359553279n$ يقبل القسمة على 370985174527999359553280 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 618475290623999359328319n$ يقبل القسمة على 618475290623999359328320 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 742170348031999359443519n$ يقبل القسمة على 742170348031999359443520 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 1236950580223999359218239n$ يقبل القسمة على 1236950580223999359218240 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 1484340696063999359333439n$ يقبل القسمة على 1484340696063999359333440 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 2473901160447999359108159n$ يقبل القسمة على 2473901160447999359108160 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 2968681392639999359223359n$ يقبل القسمة على 2968681392639999359223360 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 4947802320895999359438079n$ يقبل القسمة على 4947802320895999359438080 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 5937362785279999359553279n$ يقبل القسمة على 5937362785279999359553280 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 9895604641279999359328319n$ يقبل القسمة على 9895604641279999359328320 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 11874725570559999359443519n$ يقبل القسمة على 11874725570559999359443520 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 19791209299455999359218239n$ يقبل القسمة على 19791209299455999359218240 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 23749451159039999359333439n$ يقبل القسمة على 23749451159039999359333440 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 39582418598911999359108159n$ يقبل القسمة على 39582418598911999359108160 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 47498902318079999359223359n$ يقبل القسمة على 47498902318079999359223360 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 79165837197823999359438079n$ يقبل القسمة على 79165837197823999359438080 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 94998804636543999359553279n$ يقبل القسمة على 94998804636543999359553280 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 158331674395647999359328319n$ يقبل القسمة على 158331674395647999359328320 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 189997609273087999359443519n$ يقبل القسمة على 189997609273087999359443520 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 316663348791295999359218239n$ يقبل القسمة على 316663348791295999359218240 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 379995218550015999359333439n$ يقبل القسمة على 379995218550015999359333440 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 633326697582591999359108159n$ يقبل القسمة على 633326697582591999359108160 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 759990437100031999359223359n$ يقبل القسمة على 759990437100031999359223360 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 1266653395165183999359438079n$ يقبل القسمة على 1266653395165183999359438080 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 1519980874200063999359553279n$ يقبل القسمة على 1519980874200063999359553280 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 2533307790330367999359328319n$ يقبل القسمة على 2533307790330367999359328320 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 3039961748400127999359443519n$ يقبل القسمة على 3039961748400127999359443520 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 5066615580660735999359218239n$ يقبل القسمة على 5066615580660735999359218240 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 6079923496800255999359333439n$ يقبل القسمة على 6079923496800255999359333440 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 10133231161321471999359108159n$ يقبل القسمة على 10133231161321471999359108160 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 12159846993600511999359223359n$ يقبل القسمة على 12159846993600511999359223360 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 20266461322642943999359438079n$ يقبل القسمة على 20266461322642943999359438080 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 24319769987201023999359553279n$ يقبل القسمة على 24319769987201023999359553280 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 40532923645284095999359328319n$ يقبل القسمة على 40532923645284095999359328320 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 48639692974080255999359443519n$ يقبل القسمة على 48639692974080255999359443520 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 81065385290568703999359218239n$ يقبل القسمة على 81065385290568703999359218240 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 97278154948321023999359333439n$ يقبل القسمة على 97278154948321023999359333440 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 162130770581137151999359108159n$ يقبل القسمة على 162130770581137151999359108160 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 194556308896801791999359223359n$ يقبل القسمة على 194556308896801791999359223360 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 324261539162274303999359438079n$ يقبل القسمة على 324261539162274303999359438080 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 389113847792641535999359553279n$ يقبل القسمة على 389113847792641535999359553280 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 648523077324548607999359328319n$ يقبل القسمة على 648523077324548607999359328320 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 778227695585282047999359443519n$ يقبل القسمة على 778227695585282047999359443520 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 1296846154649097215999359218239n$ يقبل القسمة على 1296846154649097215999359218240 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 1556455391170564095999359333439n$ يقبل القسمة على 1556455391170564095999359333440 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 2593692308298194431999359108159n$ يقبل القسمة على 2593692308298194431999359108160 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 3112910782341128191999359223359n$ يقبل القسمة على 3112910782341128191999359223360 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 5186384616596388863999359438079n$ يقبل القسمة على 5186384616596388863999359438080 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 6225821564682256383999359553279n$ يقبل القسمة على 6225821564682256383999359553280 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 10373769233192777727999359328319n$ يقبل القسمة على 10373769233192777727999359328320 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 12452732128364513279999359443519n$ يقبل القسمة على 12452732128364513279999359443520 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 20747538466385555455999359218239n$ يقبل القسمة على 20747538466385555455999359218240 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 24905464257728026111999359333439n$ يقبل القسمة على 24905464257728026111999359333440 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 41509076931770910207999359108159n$ يقبل القسمة على 41509076931770910207999359108160 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 49810928515457052671999359223359n$ يقبل القسمة على 49810928515457052671999359223360 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 83015153862841820927999359438079n$ يقبل القسمة على 83015153862841820927999359438080 بدون باقٍ.

تمرين

إذا كان n عدداً طبيعياً فأثبت أن $n^3 + 99618257031144105343999359553279n$ يقبل القسمة على 99618257031144105343999359553280 بدون

مثال إذا ألقيت قطعة نقد متزنة مرتين متتاليتين فما إذا كانت النتيجة الأولى ظهور صورة والثانية ظهور كتابة.

الحل

ن(م) = عدد النتائج الممكنة لإلقاء قطعة النقد مرتين متتاليتين = $٢^{٢}$ = ٤

ن(أ) = عدد النتائج الممكنة لظهور صورة في الإلقاء الأول ثم كتابة في الإلقاء الثاني = $١^{١} \times ١^{١}$

= ١ × ١ = ١

$$\text{ح}(أ) = \frac{\text{ن}(أ)}{\text{ن}(م)} = \frac{١}{٤}$$

قطعة (٧) تحتوي صندوق على ٦ كرات حمراء و ٤ كرات بيضاء سحبت كرة واحدة عشوائيا فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء

ن(م) = عدد النتائج الممكنة لسحب كرة واحدة من الصندوق = $١٠^{١}$

ن(أ) = عدد النتائج الممكنة لسحب كرة حمراء من الصندوق = $٦^{١}$

$$\text{ح}(أ) = \frac{\text{ن}(أ)}{\text{ن}(م)} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$$

مثال صندوق يحتوي على ٣ كرات حمراء و ٤ كرات بيضاء سحبت كرة عشوائيا فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء

ن(م) = عدد النتائج الممكنة لسحب كرة واحدة من الصندوق = $٧^{١}$

ن(أ) = عدد النتائج الممكنة لسحب كرة بيضاء من الصندوق = $٤^{١}$

$$\text{ح}(أ) = \frac{\text{ن}(أ)}{\text{ن}(م)} = \frac{٤}{٧}$$

مثال صندوق يحتوي على ٦ كرات حمراء و ٤ كرات بيضاء سحبت كرة عشوائيا فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء

ن(م) = عدد النتائج الممكنة لسحب كرة واحدة من الصندوق = $١٠^{١}$

ن(أ) = عدد النتائج الممكنة لسحب كرة حمراء من الصندوق = $٦^{١}$

$$\text{ح}(أ) = \frac{\text{ن}(أ)}{\text{ن}(م)} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$$

ن(م) = عدد النتائج الممكنة لسحب كرة واحدة من الصندوق = $١٤^{١}$ = ١٤

ن(أ) = عدد النتائج الممكنة لسحب كرة بيضاء من الصندوق = $٨^{١}$

$$\text{ح}(أ) = \frac{\text{ن}(أ)}{\text{ن}(م)} = \frac{٨}{١٤} = \frac{٤}{٧}$$

مثال صندوق يحتوي على ٣ كرات حمراء و ٤ كرات بيضاء سحبت كرة عشوائيا فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء

ن(م) = عدد النتائج الممكنة لسحب كرة واحدة من الصندوق = $٧^{١}$

ن(أ) = عدد النتائج الممكنة لسحب كرة بيضاء من الصندوق = $٤^{١}$

$$\text{ح}(أ) = \frac{\text{ن}(أ)}{\text{ن}(م)} = \frac{٤}{٧}$$

مثال صندوق يحتوي على ٦ كرات حمراء و ٤ كرات بيضاء سحبت كرة عشوائيا فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء

ن(م) = عدد النتائج الممكنة لسحب كرة واحدة من الصندوق = $١٠^{١}$

ن(أ) = عدد النتائج الممكنة لسحب كرة حمراء من الصندوق = $٦^{١}$

$$\text{ح}(أ) = \frac{\text{ن}(أ)}{\text{ن}(م)} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$$

قطعة (٨) صندوق يحتوي على ٣ كرات حمراء و ٤ كرات بيضاء سحبت كرة واحدة عشوائيا فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء

ن(م) = عدد النتائج الممكنة لسحب كرة واحدة من الصندوق = $٧^{١}$

ن(أ) = عدد النتائج الممكنة لسحب كرة حمراء من الصندوق = $٣^{١}$

$$\text{ح}(أ) = \frac{\text{ن}(أ)}{\text{ن}(م)} = \frac{٣}{٧}$$

مثال إذا ألقيت قطعة نقد متزنة مرتين متتاليتين فما احتمال أن تكون النتيجة الأولى ظهور صورة والثانية ظهور كتابة.

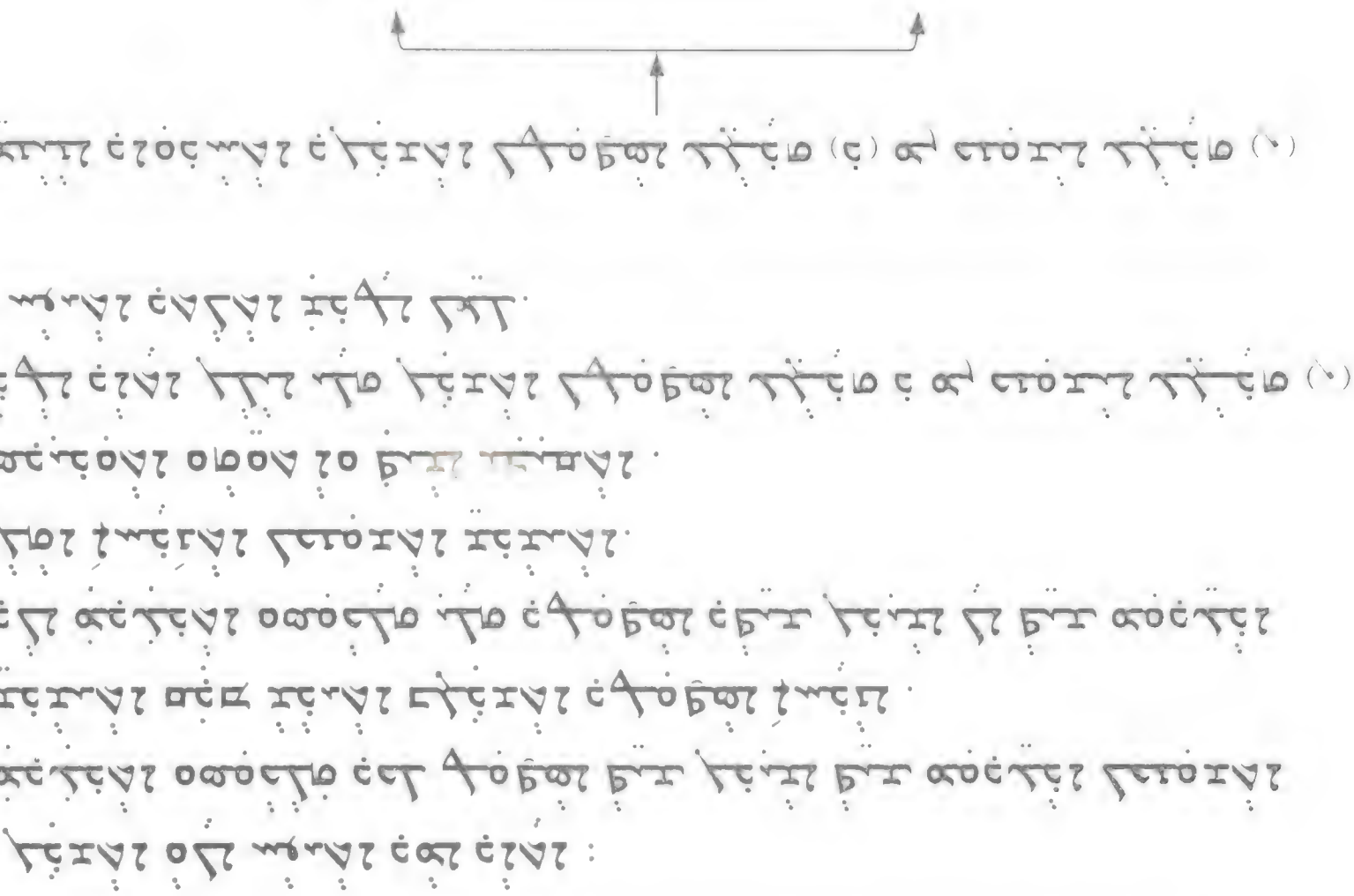
الحل

ن(م) = عدد النتائج الممكنة لإلقاء قطعة النقد مرتين متتاليتين = $٢^{٢}$ = ٤

ن(أ) = عدد النتائج الممكنة لظهور صورة في الإلقاء الأول ثم كتابة في الإلقاء الثاني = $١^{١} \times ١^{١}$

= ١ × ١ = ١

$$\text{ح}(أ) = \frac{\text{ن}(أ)}{\text{ن}(م)} = \frac{١}{٤}$$



عينة ذرات مجهولة (ن) من عناصر مختلفة (ن) من عناصر مختلفة

الحل

$L_{\circ} = \circ$ إذا $= ١٢٠$ مترًا

عينة ذرات معلوم

متزن ذو كتلة $= \circ$ ، ٢٠ جم

متزن ذو كتلة $= \circ$ ، ١٢ جم

عينة ذرات مجهول

كتلة $= ٦٠$ ؛ عينة ذرات إحداثيات إحداثيات (ن) من

عناصر عينة إحداثيات (٢)

حيث ن ≥ ١ ، $١ \in$ ط$_{+}$

مثال

عينة إحداثيات فلز نقي له متزن كتلة $= \circ$ إذا $=$ كم

متزن ذو كتلة $= \circ$ ، ٢٥ جم

عينة ذرات معلوم

$L_{\circ} = \circ$ إذا $= ١٢٠$ مترًا

الحل (٨) عدد ذرات عينة إحداثيات فلز نقي معلوم كم عدد

إحداثيات عينة إحداثيات فلز نقي مجهول كم إحداثيات

(متزن)

مثال عينة إحداثيات فلز نقي له متزن كتلة $= \circ$ إذا $=$ كم

متزن ذو كتلة $= \circ$ ، ٢٥ جم

عينة ذرات معلوم

١. عينة إحداثيات حل الحل في هذا في حين إحداثيات لعدة

عناصر متزن عناصر إحداثيات إحداثيات الحل.

٢. إحداثيات عينة إحداثيات معلوم له فلز هذا في حين عينة

إحداثيات الحل.

(٤) عدد حدود المتتابعة = $ن_{١٠} = ن_{٧} = ٢١٠$

(٣) عدد حدود المتتابعة = $ل_{١٠} = ل_{٧} = ٢١٠$

(٢) عدد حدود المتتابعة = $ن_{ن+ن-١} = ن_{٩} = ٨٤$

(١) عدد حدود المتتابعة = $\frac{١}{٥}$ = $٧_{٣}$ = ٣٤٣

مثال لكل $ن = ٧ ، ن = ٣$ حقق المتتابعة حسب القانون المعطى

لإيجاد عدد حدود المتتابعة نعلم أن الحد الأخير هو الحد العام

(١) عدد حدود المتتابعة هو $ن$ = ٧

(٢) عدد حدود المتتابعة هو $ن$ = ٩

(٣) عدد حدود المتتابعة هو $ن$ = ١٠

(٤) عدد حدود المتتابعة هو $ن$ = ١١

(٥) عدد حدود المتتابعة هو $ن$ = ٢٥ (لماذا حدد عدد حدود المتتابعة)

تمرين ٦ - ٢

(١) عدد حدود المتتابعة الحسابية التي حدها الأول ٧ وحدها الأخير ٢٠٠ وأساسها ٧

(٢) عدد حدود المتتابعة الحسابية التي حدها الأول ٨ وأساسها ٣ ومجموعها ٢٠٠

(٣) عدد حدود المتتابعة الحسابية التي حدها الأول ٨ وأساسها ٣ وحدها الأخير ٢٠٠

(٤) عدد حدود المتتابعة الحسابية التي حدها الأول ٨ وأساسها ٣ ومجموعها ٢٠٠

ملاحظة

١. لا فرق بين إيجاد عدد حدود المتتابعة حسابية أو غير حسابية

عدد حدودها

٦٠٥ كسور جزئية

مثال (١٠٥٠٦)

ليكن ق(هـ) كثير حدود درجته (هـ) حيث س(هـ) معرفة إما بقاعدة واحدة أو بأكثر من قاعدة :

إذا (هـ) مقدار ثابت ، فإن تكامل دالة ثابت حيث (ت) هو :

$$\int \frac{\text{ت}}{\text{هـ}} = \text{ت} \ln |\text{هـ}| + \text{ث}$$

(١) أوجد ∫ (٥ / س) دس .

(٢) أوجد ∫ (٣ / (٢س + ٥)) دس .

(٣) أوجد ∫ (٢س + ٣) / (س + ٢) دس .

(٤) أوجد ∫ (٢س + ٥) / (س + ١)(س + ٢) دس .

(٥) أوجد ∫ (٣س + ٥) / (س + ١)(س + ٢)(س + ٣) دس .

(٦) أوجد ∫ (٣س + ٥) / (س + ١)(س + ٢)(س + ٣)(س + ٤) دس .

(٧) أوجد ∫ (٣س + ٥) / (س + ١)(س + ٢)(س + ٣)(س + ٤)(س + ٥) دس .

(٨) أوجد ∫ (٣س + ٥) / (س + ١)(س + ٢)(س + ٣)(س + ٤)(س + ٥)(س + ٦) دس .

(٩) أوجد ∫ (٣س + ٥) / (س + ١)(س + ٢)(س + ٣)(س + ٤)(س + ٥)(س + ٦)(س + ٧) دس .

(١٠) أوجد ∫ (٣س + ٥) / (س + ١)(س + ٢)(س + ٣)(س + ٤)(س + ٥)(س + ٦)(س + ٧)(س + ٨) دس .

(١١) أوجد ∫ (٣س + ٥) / (س + ١)(س + ٢)(س + ٣)(س + ٤)(س + ٥)(س + ٦)(س + ٧)(س + ٨)(س + ٩) دس .

(١٢) أوجد ∫ (٣س + ٥) / (س + ١)(س + ٢)(س + ٣)(س + ٤)(س + ٥)(س + ٦)(س + ٧)(س + ٨)(س + ٩)(س + ١٠) دس .

(١٣) أوجد ∫ (٣س + ٥) / (س + ١)(س + ٢)(س + ٣)(س + ٤)(س + ٥)(س + ٦)(س + ٧)(س + ٨)(س + ٩)(س + ١٠)(س + ١١) دس .

(١٤) أوجد ∫ (٣س + ٥) / (س + ١)(س + ٢)(س + ٣)(س + ٤)(س + ٥)(س + ٦)(س + ٧)(س + ٨)(س + ٩)(س + ١٠)(س + ١١)(س + ١٢) دس .

(١٥) أوجد ∫ (٣س + ٥) / (س + ١)(س + ٢)(س + ٣)(س + ٤)(س + ٥)(س + ٦)(س + ٧)(س + ٨)(س + ٩)(س + ١٠)(س + ١١)(س + ١٢)(س + ١٣) دس .

(١٦) أوجد ∫ (٣س + ٥) / (س + ١)(س + ٢)(س + ٣)(س + ٤)(س + ٥)(س + ٦)(س + ٧)(س + ٨)(س + ٩)(س + ١٠)(س + ١١)(س + ١٢)(س + ١٣)(س + ١٤) دس .

(١٧) أوجد ∫ (٣س + ٥) / (س + ١)(س + ٢)(س + ٣)(س + ٤)(س + ٥)(س + ٦)(س + ٧)(س + ٨)(س + ٩)(س + ١٠)(س + ١١)(س + ١٢)(س + ١٣)(س + ١٤)(س + ١٥) دس .

(١٨) أوجد ∫ (٣س + ٥) / (س + ١)(س + ٢)(س + ٣)(س + ٤)(س + ٥)(س + ٦)(س + ٧)(س + ٨)(س + ٩)(س + ١٠)(س + ١١)(س + ١٢)(س + ١٣)(س + ١٤)(س + ١٥)(س + ١٦) دس .

(١٩) أوجد ∫ (٣س + ٥) / (س + ١)(س + ٢)(س + ٣)(س + ٤)(س + ٥)(س + ٦)(س + ٧)(س + ٨)(س + ٩)(س + ١٠)(س + ١١)(س + ١٢)(س + ١٣)(س + ١٤)(س + ١٥)(س + ١٦)(س + ١٧) دس .

(٢٠) أوجد ∫ (٣س + ٥) / (س + ١)(س + ٢)(س + ٣)(س + ٤)(س + ٥)(س + ٦)(س + ٧)(س + ٨)(س + ٩)(س + ١٠)(س + ١١)(س + ١٢)(س + ١٣)(س + ١٤)(س + ١٥)(س + ١٦)(س + ١٧)(س + ١٨) دس .

$\therefore \quad س(هـ) = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = ١$

$س(٦٦) = \frac{١}{٤}$

الحل (١٢) نوجد أولاً فضاء العينة ومنه أحداث البسط :

$هـ = \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ \}$

$س(١) = \frac{١}{٦}، س(٢) = \frac{١}{٦}، س(٣) = \frac{١}{٦}، س(٤) = \frac{١}{٦}، س(٥) = \frac{١}{٦}، س(٦) = \frac{١}{٦}$

ظ٢٠ $س(أ) = \frac{ن}{٦}، ن \in \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ \}$

$س(هـ) = ١$

الحل (١١) نوجد أولاً فضاء عينة تجربة إلقاء حجري نرد :

$هـ = \{ ١١ ، ١٢ ، ٢١ ، ٢٢ \}$

$س(١١) = \frac{١}{٤}$ ، $س(١٢) \frac{١}{٤}$ ، $س(٢١) = \frac{١}{٤}$ ،

ظ٢١ $س(ب ب) = \frac{١}{٤}$ ، $س(ب ك) \frac{١}{٤}$ ، $س(ك ب) = \frac{١}{٤}$ ،

$س(ك ك) = ١ - (\frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤}) = \frac{١}{٤}$

$هـ = \{ ب ب ، ب ك ، ك ب ، ك ك \}$

الحل (١٠) نوجد أولاً فضاء عينة تجربة إلقاء قطعة نقود :

$هـ = \{ ب ، ك \}$

ظ٢٢ $س(ب) = \frac{١}{٢}$ ، $س(ك) \frac{١}{٢}$

$س(هـ) = س(ب) + س(ك) = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = ١$

الحل (١٢) نوجد أولاً فضاء العينة ومنه أحداث البسط :

$هـ = \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ \}$

$س(١) = \frac{١}{٦}، س(٢) = \frac{١}{٦}، س(٣) = \frac{١}{٦}، س(٤) = \frac{١}{٦}، س(٥) = \frac{١}{٦}، س(٦) = \frac{١}{٦}$

ظ٢٣ $س(أ) = \frac{ن}{٦}، ن \in \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ \}$

$س(هـ) = ١$

خصائص الاحتمال

(١) $٠ \leq س(أ) \leq ١$ حيث (هـ) حدث مؤكد و $س(أ) = ١$

(٢) احتمال حدث مستحيل يساوي الصفر أي إذا كان (هـ) حدث مستحيل فإن $س(أ) = ٠$

١. إذا كانت أ ، ب حادثين فإن

$$ح(أ \cup ب) = ح(أ) + ح(ب) - ح(أ \cap ب)$$

٢. إذا كانت أ ، ب حادثين فإن $ح(أ \cup ب) = ح(أ) + ح(ب)$

٣. إذا كانت أ ، ب حادثين فإن $أ \subset ب$ تؤدي إلى

$$ح(أ) \leq ح(ب)$$

حل المثال

الحادث (ن) هو حل المعادلة جتا س = ١ في الفترة (صفر ، ٢ط)

إذاً الحادث (ن) هو المجموعة (صفر)

مثال (٤) ليكن لدينا حجر نرد مرقم كما بالشكل. فإذا

كانت ن (٧) هي عدد مرات ظهور العدد (١١).

٢٠٥٠٢ قانون جمعيات

مثال (١٢) ليكن أ حادثاً في فضاء عينة جمعيات في إلقاء قطعة نقود مرتين. إذا كان

جتا س = $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$ × ٢ = ح(ي) قانون جمعيات في إلقاء قطعة نقود

$$ل = \frac{٣}{١} \text{ قانون جمعيات في إلقاء قطعة نقود}$$

$$٣ ل = ١$$

$$ل + ٢ ل = ١$$

في جمعيات جمعيات لها نفس إلقاء قطعة نقود مرة مع . فإن

جتا س(ي) = ٢ س(ي) = ٢ل

مثال متغير س(ي) = ل

جمعيات جل حل يوضح : حادث .

يوضح لكل جمعيات في إلقاء قطعة نقود مرتين. إذا

مثال (١٣) قطعة نقود عملة إذا جمع جمعيات في إلقاء

مثال نتحقق مبتدئين (٢) قاعدة جمع الاحتمالات، (٣) قاعدة ضرب الاحتمالات، (٤) قاعدة جمع الاحتمالات، ثم نتحقق من قاعدة بيز.

الحل (١) نتحقق مبتدئين بالتجربة العشوائية ج المكونة من رمي قطعة نقد مرتين متتاليتين.

$$ج = \{ (ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك) \}$$

$$ن(ج) = ٤$$

$$ن(ص_١ \cap ص_٢) = ١$$

$$ن(ص_١) \times ن(ص_٢) = ٢ \times ٢ = ٤$$

$$\therefore ن(ص_١ \cap ص_٢) = ن(ص_١) \times ن(ص_٢)$$

$\therefore$ الحادثتان $ص_١$، $ص_٢$ مستقلتان.

(٢) نتحقق مبتدئين بالتجربة العشوائية ج المكونة من رمي قطعة نقد ثلاث مرات متتالية.

$$ن(ج) = ٨$$

$$ن(ص_١) = ٤$$

$$ن(ص_٢) = ٤$$

$$ن(ص_١ \cap ص_٢) = ٢$$

$$\therefore ن(ص_١ \cap ص_٢) = ن(ص_١) \times ن(ص_٢)$$

$\therefore$ الحادثتان $ص_١$، $ص_٢$ مستقلتان.

(٣) نتحقق مبتدئين بالتجربة العشوائية ج المكونة من رمي قطعة نقد مرتين متتاليتين.

$$ن(ج) = ٤$$

$$ن(ص_١) = ٣$$

$$ن(ص_٢) = ٣$$

$$ن(ص_١ \cap ص_٢) = ٢$$

$$\therefore ن(ص_١ \cap ص_٢) \neq ن(ص_١) \times ن(ص_٢)$$

$\therefore$ الحادثتان $ص_١$، $ص_٢$ غير مستقلتين.

(٤) نتحقق مبتدئين بالتجربة العشوائية ج المكونة من رمي قطعة نقد مرتين متتاليتين.

$$ن(ج) = ٤$$

$$ن(ص_١) = ٣$$

$$ن(ص_٢) = ٣$$

$$ن(ص_١ \cap ص_٢) = ١$$

$$\therefore ن(ص_١ \cap ص_٢) \neq ن(ص_١) \times ن(ص_٢)$$

$\therefore$ الحادثتان $ص_١$، $ص_٢$ غير مستقلتين.

مثال نتحقق مبتدئين $ل$ ملقى قطعة نقد متزنة مرة واحدة، $ب$ ملقى قطعة نقد متزنة مرة واحدة.

نتحقق مبتدئين $ب$ ملقى قطعة نقد متزنة مرة واحدة، $ل$ ملقى قطعة نقد متزنة مرة واحدة.

ومن ذلك نجد أن $ل$، $ب$ حادثتان مستقلتان.

نفرض أن $ل$، $ب$ حادثتان في فضاء عينة تجربة ما، فإذا كان $ن(ل) = ٢$، $ن(ب) = ٣$، $ن(ل \cap ب) = ١$، فأوجد $ن(ل \cup ب)$.

الحل

$$ن(ل \cup ب) = ن(ل) + ن(ب) - ن(ل \cap ب)$$

$$= \frac{٢}{٦} + \frac{٣}{٦} - \frac{١}{٦}$$

$$= \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$$

في مثال تجربة رمي قطعة نقد مرتين: $ن(ل) = \frac{٢}{٤}$ ، $ن(ب) = \frac{٣}{٤}$

$$ن(ل \cap ب) = \frac{١}{٤}$$

$$ن(ل) \times ن(ب) = \frac{٢}{٤} \times \frac{٣}{٤} = \frac{٦}{١٦} = \frac{٣}{٨}$$

$$\therefore ن(ل \cap ب) \neq ن(ل) \times ن(ب)$$

$\therefore$ الحادثتان $ل$، $ب$ غير مستقلتين.

مثال إذا كان $ن(ص_١) = \frac{٢}{٣}$ ، $ن(ص_٢) = \frac{١}{٢}$ ، $ن(ص_١ \cap ص_٢) = \frac{١}{٦}$ فأوجد $ن(ص_١ \cup ص_٢)$.

الحل

$$ن(ص_١ \cup ص_٢) = ن(ص_١) + ن(ص_٢) - ن(ص_١ \cap ص_٢)$$

$$= \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٦}$$

$$= \frac{٤}{٦} + \frac{٣}{٦} - \frac{١}{٦}$$

$$= \frac{٦}{٦} = ١$$

$$س(ع) = \frac{\text{ط}_{٢٠}}{\text{ط}_{١٠}} = \frac{٢}{١}$$

خواصُّ دالةِ دلتا ودالةِ طبقيةِ

ولو وجد عددان س (ع ∪ ص)

فيجد.

فيما إذا كان كلٌّ من عددِ نواتجِ دحرجةِ حجرِ نردٍ مرتين متتاليتين وعددِ مراتِ ظهورِ العددِ الذي
ص ظهورُ العددِ مضاعفًا لـ ٣ في تجربةٍ عشوائيةٍ.

مرتين متتاليتين.

نردٍ مرةً واحدةً ونرمز بالرمز ع : ع ظهورُ العددِ فرديًّا في تجربةٍ عشوائيةٍ.

ع ظهورُ العددِ مضاعفًا لـ ٣ في تجربةٍ عشوائيةٍ.

فيما إذا كان كلٌّ من عددِ نواتجِ دحرجةِ حجرِ نردٍ مرتين متتاليتين وعددِ مراتِ ظهورِ العددِ الذي

فيجد.

ولو وجد عددان س (ع ∪ ص)

خواصُّ دالةِ دلتا وطبقيةِ

يرادف سحب كل العدد فتصبح ص (١) ولـ (٢٠) ط. صفل دلتا

في العدد فإن دالة دلتا تساوي

فيجد.

حل

$$\text{فيجد } س(ع \cup ص) = \frac{٢٥٢}{٣٣} - \frac{٦٩}{٣٣} + \frac{٢٥٠١}{٣٣}$$

فيجد (٢٠٠٥، ٦)

لكل عددين ع، ص ينتميان إلى ف فإن س (ع ∪ ص) = س (ع) + س(ص) − س (ع ∩ ص)

لكل عددين ع، ص ينتميان إلى ف فإن س (ع ∪ ص) = س (ع) + س(ص)

حيث ع ∩ ص = ∅

مثال (١٦)

يرادف سحب كل العدد فتصبح ص (١) ولـ (٢٠) ط. صفل دلتا

في العدد فإن دالة دلتا تساوي

فيجد.

حل

(١) يَرْجِعُ سَبَبُ ذَلِكَ لِعِدَّةِ عَيِّنَاتٍ (جُسَيْمَاتٍ عَنْ سَبِيلِ مِثَالٍ) تَمْلِكُ شَحْنَةً مُ

(٢) يَرْجِعُ سَبَبُ ذَلِكَ زِيَادَةُ عَيِّنَاتٍ مِثْلِ هَذِهِ عَيِّنَاتٍ بَعْدَ

جِهَازُ هَذَا عَيِّنَاتٍ تَعْمِلُ عَلَى أَسَاسِ تَأْثِيرِ هَذِهِ الْخَاصِّيَّةِ فِي

حَيْثُ تَتَأَثَّرُ جُزَيْئَاتُ عَيِّنَاتٍ بِمَجَالٍ كَهْرَبِيٍّ مُنْتَظِمٍ

عَيِّنَاتٍ مُ

مِثَالٌ (٥ ، ٦) لِتَكُنْ

فَسِّرْ سَبَبَ (أ ∪ ب) = $\frac{٢}{١} \times \frac{١٩}{٩} = \frac{٣٨}{٩}$

$\therefore$ س (ب) = $\frac{\text{ن}_{١٩}}{\text{ن}_{٩}^{١}} = \frac{١٩}{٩}$

حَيْثُ أَنَّ أَحَادِيَّةَ أَحَادِيَّةٍ

لِتَكُنْ مَجْمُوعَةُ أَحَادِيَّةٍ إِلَى يَرْجِعُ ١٩

سَبَبُ أَنَّ أَحَادِيَّةَ أَحَادِيَّةٍ مَجْمُوعَةٌ مَعْلُومَةٌ لِتَكُنْ أَحَادِيَّةٍ

(٦) هذه برتوط متر طلبة عدده لل (٨) متر سوت و (٦) متر حوت .

زعب كسوداد جصدادتدداد جلدتداد (٣) متر سوت ح برتوط
متحك. لدتداد جدتد متر سوت وتتر حوت ح برتوط هذلد .

(٣) ل. مصدادتدداد جلدتد سد ١ متد لسند لله $\frac{1}{3}$ زعب مصدادتدداد
جسد تدد وله ١ متد لسند لله $\frac{1}{4}$ زعب مصدادتدداد
(ل) جسد هدوح ١ متد لسند .
(ب) جسد سج مدوح ديوتداد ١ متد

(٤) له مجداد ولدتداد لاد سد تجداد جلوتد وسد تجداد جتولد
لدتداد زلسد.
مصدادتدداد جصد تجداد جتولد ديلتد جسادتوداد لله (٨٩٠)
وصدادتدداد جصد تجداد جلوتد ديلتد جسادتوداد لله (٢٩٠)
دزتدداد جدتداد جوتتد له ديتد وصولداد جدتد حتوز
زعب مصدادتدداد جصد هدوح تجداد ؛

(٥) مصدادتدداد جلسد ملوتد له مللولد جتدوداد لله $\frac{٢}{٣}$
وصدادتدداد جلسد ملوتد لدلد له مللولد جلسوداد لله $\frac{٩}{٤}$
ل. مصدادتدداد جلسوداد ديوتداد له سج مللولد سصود $\frac{٥}{٤}$
حتد لله مصدادتدداد جلسد ملوتد لدلد هدوح مللولد ؛

بیرکاری

پەرلەمانی زانستی

ژمارەی سپاردن ٣٣٤ ساڵی ٢٠٠٣

٢٧٠٣ کوردی - ٢٠٠٣ ز - ٦٧٥٣ أ

چاپخانەی وەزارەتی پەروەردە - هەولێر

تیراژ (١٠٠٠) دانە